



**Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de  
las Matemáticas**

**Plan de Estudios 2022  
Estrategia Nacional de Mejora de  
las Escuelas Normales**

**Programa del curso  
Sentido numérico  
y teoría de la  
aritmética**

**1er semestre**

Primera edición: 2022

Esta edición estuvo a cargo de la Dirección General  
de Educación Superior para el Magisterio  
Av. Universidad 1200. Quinto piso, Col. Xoco,  
C.P. 03330, Ciudad de México

D.R. Secretaría de Educación Pública, 2022  
Argentina 28, Col. Centro, C. P. 06020, Ciudad de México

Trayecto formativo: **Formación Pedagógica, Didáctica e Interdisciplinar**

Carácter del curso: Obligatorio del currículo nacional base

Horas: **4**    Créditos: **4.5**

## Contenido

Propósito y descripción general del curso	5
Dominios y desempeños del perfil de egreso a los que contribuye el curso	9
Estructura del curso	12
Orientaciones para el aprendizaje y enseñanza	14
Sugerencias de evaluación	17
Unidad de aprendizaje I. El sentido numérico y los números naturales	20
Unidad de aprendizaje II. Divisibilidad y ecuaciones diofánticas	26
Unidad de aprendizaje III. Aritmética modular y números reales	31
Evidencia integradora del curso	36
Perfil académico sugerido	37
Referencias para la elaboración de este programa	38

## **Propósito y descripción general del curso**

### **Propósito general**

El estudiantado desarrollará el sentido numérico y comprenderá los fundamentos de la teoría de la aritmética, a partir de la resolución de problemas y el uso de herramientas digitales para que sean capaces de relacionar números y aplicar propiedades de las operaciones en distintos conjuntos numéricos, de tal forma que lo pongan en práctica con estudiantes de educación básica y media superior.

### **Antecedentes**

El estudio del sentido numérico y la teoría de la aritmética constituyen un fundamento esencial de la parte disciplinar en la formación inicial y la práctica profesional de los futuros docentes. Lo anterior, se debe a que en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son importantes para la construcción de conceptos, conjeturas y demostraciones, así como la formulación de juicios, argumentos y razonamientos que llevarán a la práctica con estudiantes de educación básica y media superior.

### **Descripción**

El término 'sentido numérico' ha sido definido por distintos autores como un conocimiento (Sowder, 1988), una intuición (Van de Walle & Browman, 1993), habilidad (Mcintosh, Reys, &, Reys, 1992), comprensión (Trafton & Hartman, 1997) o un razonamiento (Friel y Carboni, 2000) al usar números y resolver operaciones.

De acuerdo con el National Council of Teachers of Mathematics [NCTM, 1989], los componentes que caracterizan el sentido numérico son: el significado del número, las relaciones numéricas, el tamaño de los números, las operaciones con números y los referentes para números y cantidades. Según Greeno (1991), el sentido numérico se asocia con varias capacidades de los sujetos tales como: el cálculo mental, la estimación y el razonamiento cuantitativo.

El desarrollo del sentido numérico implica siete diferentes aspectos: (1.) la comprensión del significado de los números, (2.) el

reconocimiento del tamaño relativo y absoluto de los números y magnitudes por medio del uso de estimaciones o propiedades numéricas para hacer comparaciones, (3.) el uso de puntos de referencia para estimar un número o una magnitud al comparar o hacer cálculos, (4.) el uso de representaciones gráficas, manipulativas o pictóricas de números y operaciones, (5.) la comprensión de las operaciones y sus propiedades, (6.) el entendimiento entre el contexto del problema y la operación con la que éste se resuelve, y, (7.) el reconocimiento de la racionalización de un problema considerando sus datos, las diferentes estrategias de solución y su resultado (NTCM, 1989; Mcintosh, Reys, & Reys, 1992; Reys & Yang, 1998; Yang, 2003).

Con respecto a la teoría de la aritmética, esta rama de las matemáticas versa sobre las propiedades de los números, en particular, las de los enteros. Esta rama también conocida como teoría de números se subdivide en: (1.) Teoría elemental de números, (2.) Teoría analítica de números, (3.) Teoría de números aditiva, (4.) Teoría algebraica de números, (5.) Teoría geométrica de números, (6.) Teoría combinatoria de números, y, (7.) Teoría computacional de números.

La teoría elemental de números se asocia con el estudio de la divisibilidad, los números compuestos y primos, el teorema fundamental de la aritmética, el mínimo común múltiplo, el máximo común divisor y el algoritmo de Euclides. Asimismo, dentro de esta rama de las matemáticas se consideran los números perfectos, las congruencias e incluso ciertas conjeturas como la de Golbach y la de los números primos gemelos.

Lo antes descrito, se vincula con la temática del curso '*Sentido numérico y teoría de la aritmética*', el cual se ubica en la cuarta posición del primer semestre de la Fase 1 de Inmersión, como parte del trayecto Formación pedagógica, didáctica e interdisciplinar. De manera general, a través del estudio de los diversos contenidos de este curso se quiere favorecer la parte disciplinar en la formación inicial y práctica profesional de los futuros docentes.

Los contenidos de este curso se organizan en tres unidades de aprendizaje; en la primera se hace énfasis en el uso y desarrollo del sentido numérico y se comienza a estudiar la teoría elemental de números, en la segunda se continúa con el estudio de dicha rama de las matemáticas, la divisibilidad y los números enteros, mientras que

en la tercera unidad se centra la atención en el aprendizaje de la aritmética modular y los números reales.

El estudio sobre el desarrollo y uso del sentido numérico es importante al diseñar y realizar diversas estrategias para resolver operaciones y problemas, lo que les permitirá a los docentes en formación favorecer esto en alumnos de secundaria o nivel medio superior.

Al estudiar sobre distintos conjuntos numéricos se promoverá una construcción del concepto de número cada vez más completa, desde los naturales hasta los reales como un sistema numérico que incluye a los naturales, enteros, racionales e irracionales. Lo anterior, también permitirá el estudio y aplicación de las propiedades para la adición y multiplicación con diferentes tipos de números. Asimismo, posibilitará que los futuros docentes de matemáticas tengan las herramientas necesarias para identificar, argumentar y demostrar varias relaciones numéricas con la finalidad de promover su descubrimiento y construcción en los alumnos de educación básica y media superior.

### **Cursos con los que se relaciona**

El curso '*Sentido numérico y teoría de la aritmética*' se vincula con el de *Geometría plana y del espacio*, el cual se puede subdividir en el estudio de la forma y el espacio y el de la medida. La medición se relaciona con el cálculo y la estimación y ésta última con el sentido numérico y la teoría de la aritmética. De acuerdo con Segovia, Castro, Rico y Castro (1989), la estimación es un "juicio sobre el valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite" (p. 18). En el cálculo y la medida existen dos tipos de estimación, la primera se refiere a las operaciones aritméticas, mientras que la segunda a los juicios que pueden establecerse sobre el valor de una determinada cantidad o el resultado de una medición. Con base en lo anterior, la estimación tiene un vínculo directo con el sentido numérico ya que implica efectuar algoritmos mentales con los que se obtienen resultados aproximados.

Asimismo, el curso que se describe en este documento se relaciona con el de *Álgebra y funciones*, no sólo por el uso del conocimiento sobre números y sus operaciones sino también por la transición de la aritmética al álgebra como un eslabón fundamental para construir ideas y conceptos matemáticos más complejos y abstractos. En

aritmética las cantidades se expresan por medio de números, mientras que en álgebra se representan a través de letras. No obstante, Filloy y Rojano (1989) señalaron que las concepciones de los estudiantes con respecto a las operaciones que se llevan a cabo con números se deben modificar de tal manera que se pueda desarrollar la idea de operar con distintos objetos, o bien, concebirse como nuevos objetos.

Operar con diferentes tipos de números está presente en: la generalización de sucesiones con progresión aritmética o geométrica; las operaciones con monomios y polinomios; la resolución de ecuaciones o sistemas de ecuaciones e inecuaciones; la comprobación de la solución; la evaluación y graficación de funciones; y, el desarrollo de modelos matemáticos asociados con fenómenos naturales, biológicos, físicos o químicos.

## **Responsables del codiseño del curso**

Este curso fue elaborado por las y los docentes normalistas:

Carolina Rubí Real Ortega, Saúl Elizarrarás Baena, Maricela Bonilla González y Alejandra Ávalos Rogel de la Escuela Normal Superior de México; Gerardo Gabriel García Castrejón del Centro del Actualización del Magisterio Acapulco; Juan Manuel Córdoba Medina de la Escuela Normal Superior del Estado de México; Guillermo Contreras Reséndiz de la Escuela Normal No. 2 de Nezahualcóyotl; Alejandro López Reyes de la Escuela Normal Superior del Valle de Toluca; Evodio Jiménez Tapia Centro del Actualización del Magisterio Chilpancingo y Oliver Antonio Juárez Romero de la Escuela Normal Superior Oficial de Guanajuato.

Así como expertos en el diseño curricular: Julio César Leyva Ruiz, Sandra Elizabeth Jaime Martínez, Gladys Añorve Añorve y María del Pilar González Islas de la Dirección General de Educación Superior para el Magisterio.

## **Dominios y desempeños del perfil de egreso a los que contribuye el curso**

En este apartado se especifican tanto los aspectos del perfil general, así como los dominios y desempeños profesionales del perfil de egreso a los que contribuye el curso 'Sentido numérico y teoría de la aritmética'.

### **Perfil general**

Este curso y su implementación contribuye a lograr que la o el docente que egresa de la Escuela Normal:

- Es capaz de contextualizar el proceso de aprendizaje e incorporar temas y contenidos locales, regionales, nacionales y globales significativos; planifica, desarrolla y evalúa su práctica docente al considerar las diferentes modalidades y formas de organización de las escuelas.
- Diseña y gestiona ambientes de aprendizajes presenciales, híbridos y a distancia, respondiendo creativamente a los escenarios cambiantes de la educación y el contexto.
- Cuenta con una formación pedagógica, didáctica y disciplinar sólida para realizar procesos de educación inclusiva de acuerdo con el desarrollo cognitivo, psicológico, físico de las y los estudiantes, congruente con su entorno sociocultural.
- Es capaz de diseñar, realizar y evaluar intervenciones educativas situadas mediante el diseño de estrategias de enseñanza, aprendizaje, el acompañamiento, el uso de didácticas, materiales y recursos educativos adecuados, poniendo al estudiante en el centro del proceso educativo como protagonista de su aprendizaje.
- Es productor de saber y conocimiento pedagógico, didáctico y disciplinar, reconoce y valora la investigación educativa y la producción de conocimiento desde la experiencia; sabe problematizar, reflexionar y aprender de la práctica para transformarla.

### **Perfil profesional**

Por medio del estudio del sentido numérico y la teoría de la aritmética, se contribuye al logro de los dominios y desempeños que aparecen enseguida.

*Utiliza las matemáticas y su didáctica, así como las aportaciones que hacen diferentes disciplinas respecto al desarrollo de los adolescentes y juventudes, para hacer transposiciones didácticas, de acuerdo con las características, contextos, saberes y conocimientos multiculturales, al abordar los contenidos curriculares de los planes y programas de estudio vigentes del nivel básico y medio superior.*

- Articula el conocimiento de la matemática, su didáctica y el saber de otras disciplinas, mediante la recuperación de saberes comunitarios, para conformar marcos explicativos y de intervención eficaces entre el estudiantado de educación secundaria y media superior.

*Diseña procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, de acuerdo con la didáctica y sus enfoques vigentes, considerando los diagnósticos grupales y contextuales, los entornos presenciales o virtuales, así como situaciones que fortalecen las habilidades socioemocionales.*

- Relaciona el conocimiento de las matemáticas con los propósitos, contenidos y enfoques de otras disciplinas, propiciando un conocimiento integral de la ciencia, relacionándolos con fenómenos de la vida cotidiana.
- Diseña estrategias didácticas que favorezcan el tránsito de un pensamiento aritmético a un pensamiento algebraico, de un pensamiento geométrico a un pensamiento variacional, con base en el reconocimiento y análisis de los obstáculos que surjan, a fin de superarlos proponiendo alternativas de solución.
- Utiliza el lenguaje matemático para la resolución de problemas situados o contextualizados.
- Identifica y analiza las dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas para diseñar estrategias didácticas alternativas que le permitan al estudiantado superarlos.

- Diseña propuestas de atención educativa para el aprendizaje de las matemáticas con adolescentes y jóvenes de grupos multigrado.
- Planea experiencias de aprendizaje, de acuerdo con los estilos y ritmos de aprendizaje, las necesidades, intereses y desarrollo cognitivo de estudiantes; en entornos multimodales, presenciales, a distancia, virtuales o híbridos.

*Gestiona los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en un clima de igualdad, equidad e inclusivo que fortalece las habilidades socioemocionales, desde y para la democracia participativa.*

- Desarrolla experiencias de aprendizaje mediando la semántica y la sintaxis matemática con la finalidad de dar sentido y significado a los conocimientos, axiomas, teoremas, reglas y principios.

*Articula las distintas ramas de las Matemáticas con otras disciplinas, para facilitar el análisis de una situación modelada, desde el pensamiento complejo, que favorezca el desarrollo del pensamiento lógico-matemático del alumnado de la educación obligatoria.*

- Analiza diferentes problemas, situaciones o fenómenos para proponer modelos matemáticos desde una visión integradora y transdisciplinaria como un medio para el diseño e implementación de secuencias didácticas que favorezcan su resolución.
- Facilita el análisis de modelos desde el pensamiento matemático al articular diferentes áreas de esta disciplina que favorece el desarrollo del método axiomático, a través del razonamiento hipotético-deductivo, inductivo y analógico.
- Relaciona sus conocimientos de las matemáticas con los contenidos de otras disciplinas desde una visión integradora, multidisciplinaria, interdisciplinaria y transdisciplinaria para propiciar el aprendizaje de sus estudiantes.
- Facilita el análisis de situaciones modeladas desde el pensamiento complejo que favorece el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, geométrico y razonamiento,

en el alumnado, al articular las distintas ramas de las Matemáticas.

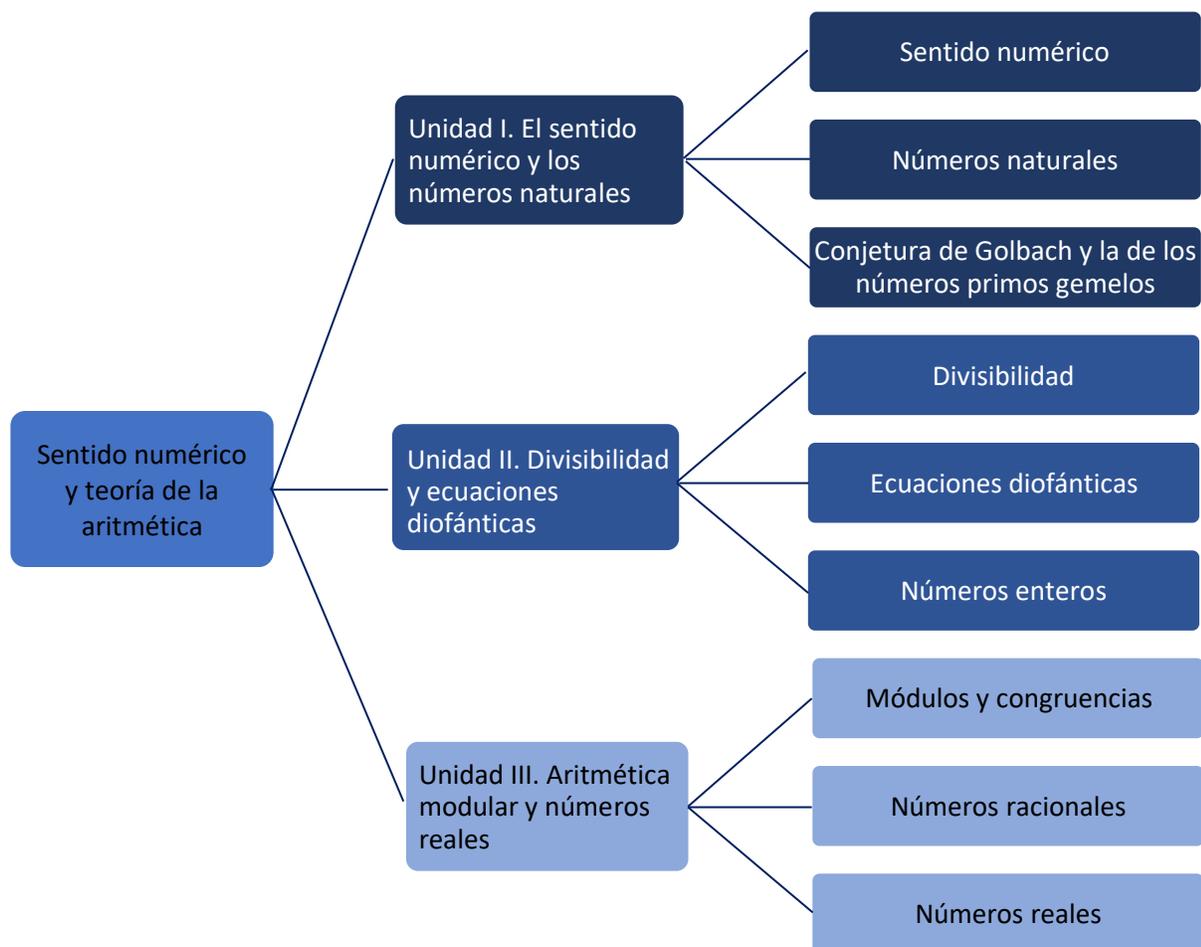
- Analiza una situación modelada mediante el reconocimiento de que una misma expresión matemática puede ser escrita de diferentes maneras, a fin de que pueda guiar al alumnado a experimentar y encontrar las suyas.
- Construye relaciones entre la geometría y el álgebra, el álgebra y la estadística, la aritmética y la probabilidad, entre otras.

*Utiliza críticamente la innovación didáctica y tecnológica en la educación, como parte de su práctica docente, para favorecer el pensamiento lógico matemático, el desarrollo del pensamiento crítico reflexivo y la formación integral del alumnado, desde una visión crítica, humanista, solidaria y con sentido ético-político.*

- Reconoce las culturas digitales, cuenta con habilidades y saberes en el uso y manejo pedagógico y crítico de las tecnologías actuales, que le permiten diseñar o seleccionar y emplear objetos de aprendizaje y recursos didácticos contextualizados, como mediadores en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, geométrico, el razonamiento y la solución de problemas en un clima de aprendizaje colaborativo e incluyente en diferentes escenarios y contextos.
- Utiliza de manera ética y crítica las Tecnologías de la Información, Comunicación, Conocimiento y Aprendizaje Digital (TICCAD), como herramientas mediadoras para la construcción del aprendizaje matemático en diferentes plataformas y modalidades multimodales, presenciales, híbridas y virtuales o a distancia, para favorecer la significatividad de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

## Estructura del curso

El curso *Sentido numérico y teoría de la aritmética* está estructurado por diversos contenidos que se organizan en tres unidades de aprendizaje.



En la primera unidad se estudiará sobre el sentido numérico como una habilidad<sup>1</sup>, intuición<sup>2</sup>, capacidad<sup>3</sup>, o bien, un razonamiento<sup>4</sup> o una

<sup>1</sup> McIntosh, Reys y Reys (1992).

<sup>2</sup> Van de Walle y Browman (1993).

<sup>3</sup> Trafton y Hartman (1997).

<sup>4</sup> Friel y Carboni (2000).

red conceptual<sup>5</sup>. También se construirá el conjunto de los números naturales, sus distintos tipos y propiedades para la adición y multiplicación, el teorema fundamental de la aritmética, la conjetura de Golbach y la de los números primos gemelos.

La segunda unidad versa sobre el estudio de la divisibilidad, el mínimo común múltiplo, el máximo común divisor, el algoritmo de Euclides, las ecuaciones diofánticas y los números enteros. Por último, en la tercera unidad se centra la atención en la aritmética modular, los números racionales y reales haciendo énfasis en sus operaciones, propiedades y aplicaciones.

---

<sup>5</sup> Castro, Castro y Rico (2004).

## Orientaciones para el aprendizaje y enseñanza

Para estudiar los contenidos de cada unidad de aprendizaje del curso 'Sentido numérico y teoría de la aritmética' se recomienda el uso de diferentes recursos didácticos entre los que sobresale la resolución de problemas y las Tecnologías de la Información, Comunicación, Conocimiento y Aprendizaje Digital (TICCAD). El uso de varios recursos y el trabajo individual, por parejas o equipos favorece distintas maneras de aprender<sup>6</sup> en los futuros docentes de matemáticas y propicia el intercambio de ideas, la retroalimentación, el diálogo y el discurso matemático en clase.

La resolución de problemas permite que los estudiantes normalistas compartan sus resultados y estrategias de solución, los cuales podrán validar y justificar mediante procedimientos informales y formales. Los problemas propuestos en clase deben enmarcarse en diversos contextos para hacer énfasis en la aplicación del conocimiento matemático en la comunidad y en otras disciplinas para que las matemáticas se consideren como una ciencia viva.

Las actividades y los problemas que se propongan en cada sesión también deberán desarrollar o potencializar distintas habilidades matemáticas en los docentes en formación tales como: estimar, calcular, inferir, deducir y comunicar.

Es importante que el formador de profesores promueva el uso de sistemas matemáticos de signos propios de la aritmética y la teoría de números en el manejo de técnicas, la formalización y justificación axiomática. Asimismo, que favorezca en los futuros docentes de matemáticas la construcción de conocimientos formales a partir del estudio de los diferentes conjuntos numéricos, sus operaciones y relaciones, lo que permitirá la exploración, el análisis de las producciones de los estudiantes y la identificación de regularidades vinculada con la generalización de procedimientos.

Asimismo, se sugiere que se generen espacios de reflexión en cuanto a la didáctica de la aritmética y al uso de los errores que ponen de manifiesto las dificultades de los alumnos de educación básica y media superior.

---

<sup>6</sup>Las maneras de aprender se refieren a diversos tipos de aprendizaje: implícito, explícito, asociativo, no asociativo, significativo, cooperativo, colaborativo, observacional, experiencial y por descubrimiento.

Las orientaciones didácticas para cada unidad de aprendizaje son descritas en los siguientes párrafos:

En la unidad I, inicialmente se deberá priorizar el cálculo mental y la estimación con la finalidad de favorecer el desarrollo del sentido numérico, así como el pensamiento y razonamiento matemático de los estudiantes normalistas. El desarrollo de esta habilidad será gradual como resultado de la resolución de operaciones y problemas en una variedad de contextos por medio de la identificación y uso de relaciones y propiedades numéricas.

Cabe señalar que para llevar a cabo procesos aritméticos es recomendable el uso de la calculadora y el software.

En cuanto al estudio del conjunto de los números naturales, se sugiere centrar la atención en su construcción matemática, sus operaciones y propiedades. Para ello, los axiomas de Peano y su definición en la teoría de conjuntos resultan interesantes.

Por un lado, la Criba de Eratóstenes debe considerarse como un algoritmo con el que se pueden encontrar los números primos hasta cierto número dado no sólo del 1 al 100. Y por el otro, el teorema de factorización o teorema fundamental de la aritmética puede demostrarse considerando la contribución de Euclides o por descenso infinito.

Con respecto a las conjeturas de Golbach y la de números primos gemelos se sugiere que se estudien como problemas matemáticos abiertos.

Para estudiar los contenidos de la unidad II, se espera que los docentes en formación puedan utilizar los números naturales con flexibilidad y creatividad para resolver operaciones y problemas.

El aprendizaje se pretende favorecer por medio de la exploración y deducción de los criterios de divisibilidad considerando las cifras que componen los números y la resolución de problemas que impliquen el uso de los criterios del mínimo común múltiplo y el máximo común divisor. Con respecto a este último, se recomienda probarlo con otro tipo de números para concluir que también funciona con otros números siempre y cuando se obtengan divisiones con residuo, esto dará lugar a las aplicaciones de este algoritmo en álgebra, teoría de números y ciencias de la computación.

De la misma manera, se recomienda presentar, resolver y discutir problemas que implican ecuaciones diofánticas cuyo proceso de

solución requiere del uso del máximo común divisor. El estudio de la aritmética modular se deberá introducir como una técnica en la que se utilizan congruencias en lugar de ecuaciones.

Por último, en la unidad III, es importante que los futuros docentes de matemáticas comprendan los diferentes significados, representaciones, operaciones y propiedades de los números racionales y reales, lo que permitirá que entiendan las dificultades que tienen los alumnos de educación básica y media superior cuando estudian sobre estos sistemas numéricos.

En particular, se sugiere que se estudien las relaciones de orden, la densidad de los números racionales, los números irracionales más conocidos como  $\sqrt{p}$  con  $p$  primo,  $\pi$  y  $e$  así como la demostración de las propiedades de los números reales.

Todo lo antes descrito, propiciará una construcción cada vez más completa del concepto matemático número.

## Sugerencias de evaluación

Las recomendaciones generales de evaluación del curso 'Sentido numérico y teoría de la aritmética' se asocian con un proceso de recolección de evidencias de aprendizaje de los futuros docentes de matemáticas con la finalidad de emitir juicios de valor asociados con el logro de los dominios y desempeños del perfil de egreso general y profesional, así como del propósito.

Para iniciar el curso, se sugiere diseñar y aplicar un instrumento de evaluación diagnóstica en el que se consideren los conocimientos previos de los estudiantes normalistas acordes con los contenidos que se estudiarán en las diferentes unidades de aprendizaje. Esta evaluación permitirá obtener información sobre las capacidades y necesidades de los docentes en formación de tal forma que sea considerada en la planificación y el diseño de las actividades que se propongan en clase.

Durante el desarrollo del curso se recomienda llevar a cabo una evaluación formativa que posibilite una regulación interactiva, retroactiva y proactiva como una estrategia de mejora para ajustar los procesos educativos. Este tipo de evaluación tiene la finalidad de modificar aquellos aspectos que en cierto sentido obstaculizan el logro tanto de cada unidad de aprendizaje, como del propósito general del curso.

Al finalizar, se espera que se realice una evaluación sumativa para valorar lo que aprendieron los futuros docentes de matemáticas e identificar aquellas características que deben modificarse para obtener mejores resultados de aprendizaje la próxima vez que se imparta el curso 'Sentido numérico y teoría de la aritmética'.

De manera general, las diferentes tareas, actividades y problemas que se realicen en clase, las evidencias de aprendizaje por unidad y la evidencia integradora se deberán evaluar mediante el uso de diferentes instrumentos de evaluación<sup>7</sup> promoviendo la autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación. Si bien, los criterios que sean considerados en el diseño de cada instrumento de evaluación pueden proponerlos los estudiantes normalistas bajo la guía del docente formador, es recomendable que este último

---

<sup>7</sup> Los diversos instrumentos que pueden utilizarse son: exámenes, listas de control, escalas de valoración, cuestionarios, rúbricas, listas de cotejo, etc.

determine los que correspondan a las evidencias para cada unidad de aprendizaje y los de la evidencia integradora.

## Evidencias de aprendizaje

A continuación, se presenta el concentrado de las evidencias de aprendizaje que se proponen para este curso, las cuales se podrá modificar, retomar o sustituir de acuerdo con los perfiles cognitivos, las características, el proceso formativo, y contextos del grupo de normalistas que atiende.

Unidad de aprendizaje	Evidencias	Descripción	Instrumento	Ponderación
Unidad I	Organizador gráfico	Herramienta que permite organizar la información más importante sobre el 'Sentido numérico y su desarrollo'	Lista de cotejo	15%
	Texto reflexivo	Documento en el que se reflexiona sobre cómo se puede desarrollar el sentido numérico en estudiantes de educación básica y media superior	Rúbrica	
	Vídeo y guion	Material que contiene lo más relevante en torno a los contenidos que se estudiaron en clase	Escala de valoración	
Unidad II	Portafolio	Compendio de actividades y problemas que se llevaron a cabo o resolvieron en las sesiones	Rúbrica	15%
	Póster	Medio para representar la información más relevante sobre los números enteros y sus propiedades	Lista de cotejo	
	Examen	Instrumento de evaluación que incluye operaciones, problemas y preguntas vinculados con los contenidos que se estudiaron para valorar los conocimientos adquiridos en la unidad		
Unidad III	Problemario	Compendio de problemas de números racionales y reales	Escala de valoración	20%
	Póster	Medio para presentar la información más significativa acerca de los números racionales y reales	Lista de cotejo	
	Examen	Instrumento para valorar los conocimientos adquiridos mediante el estudio de los diversos contenidos de la unidad		

Evidencia integradora	Proyecto sobre el uso de distintos tipos de números en la comunidad, así como en otras ciencias	Documento que contiene diferentes aplicaciones de los números naturales, enteros, racionales y reales en la comunidad y en otras disciplinas.	Rúbrica	50%
-----------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------	-----

## **Unidad de aprendizaje I. El sentido numérico y los números naturales**

### **Presentación**

En esta unidad de aprendizaje se pretende favorecer en los futuros docentes de matemáticas la comprensión y el desarrollo del sentido numérico en términos del significado del número, las relaciones numéricas, el tamaño de los números, las operaciones y sus referentes para números y cantidades. También se quiere contribuir con una construcción adecuada del concepto número natural haciendo énfasis en sus operaciones y propiedades, así como en su uso en la comunidad y en diferentes disciplinas.

### **Propósitos de la unidad de aprendizaje**

Se espera que el docente en formación:

Comprenda el sentido numérico y los números naturales mediante problemas, operaciones, propiedades, construcciones matemáticas, axiomas y teoremas para que sea capaz de desarrollar esa habilidad y estudiar ese concepto matemático con sus alumnos de educación básica y media superior.

### **Contenidos**

- El sentido numérico y su desarrollo
- Los números naturales
- Las operaciones y propiedades en los naturales
- Números compuestos y números primos
- Teorema fundamental de la aritmética
- Conjetura de Golbach
- Conjetura de números primos gemelos

### **Estrategias y recursos para el aprendizaje**

- Entrevistar a diversos comerciantes sobre cómo calculan mentalmente el resultado de diferentes operaciones

matemáticas como parte de su trabajo, para que se compartan y discutan en clase.

- Estimar y calcular diversas operaciones y discutir sobre las diferentes estrategias con las que se puede obtener el resultado.
- Con ayuda de la calculadora llenar los cuadros con los dígitos 3, 4, 5, 6, 7 u 8, de tal forma que cada uno de éstos no se utilice más de una vez por ronda.

Ronda I  $\square \times \square \square \square \square = 30,000$

Ronda II  $\square \times \square \square \square \square = 40,000$

Ronda III  $\square \times \square \square \square \square = 50,000$

Ronda IV  $\square \square \times \square \square \square \square = 30,000$

Ronda V  $\square \square \times \square \square \square \square = 60,000$

- Investigar sobre las diferentes conceptualizaciones de 'Sentido numérico' y elaborar un diagrama.
- Construir el concepto de número natural con base en la definición de Von Neumann: Un número natural es el conjunto de los números naturales anteriores a éste:  $n + 1 = \{0, 1, \dots, n\}$

$$0 = \emptyset$$

$$1 = \{0\} = \{\emptyset\}$$

$$2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$3 = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

⋮

- Proponer operaciones en las que se apliquen las propiedades para la adición y multiplicación en los  $\mathbb{N}$ .
- Realizar la criba de Eratóstenes como un procedimiento con el que se pueden determinar números primos hasta cierto número.
- Probar el Teorema Fundamental de la Aritmética considerando la demostración de Euclides y la que se denomina por descenso infinito.
- Elaborar una imagen como la que se observa en la Figura 1 para estudiar la conjetura de Golbach.

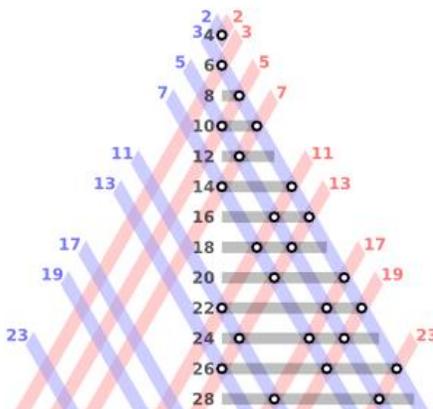


Figura 1. Esquema para el estudio de la conjetura de Golbach.

- Realizar la actividad 'Primos gemelos' y responder las preguntas que se plantean a la que podrán acceder por medio del último link de los sitios web.

### Evaluación de la unidad

La evaluación de la primera unidad de aprendizaje se da por las siguientes evidencias considerando esos criterios de evaluación.

Evidencias	Criterios de evaluación
------------	-------------------------

Organizador gráfico	<p>Utiliza las Tecnologías de la Información, Comunicación, Conocimiento y Aprendizaje Digital (TICCAD) para la búsqueda de información y elaboración del organizador gráfico que se eligió.</p> <p>Incluye palabras clave relacionadas con diferentes definiciones del sentido numérico tales como: intuición, habilidad, comprensión, razonamiento, capacidad y red conceptual.</p> <p>Ejemplifica qué tipo de operaciones y problemas se pueden plantear en clase para favorecer el desarrollo del sentido numérico.</p>
Texto reflexivo	<p>Reflexiona sobre el sentido numérico y su desarrollo a partir tanto de la información que indagó, como de las referencias más relevantes de la bibliografía sugerida.</p> <p>Identifica cómo ha cambiado en el transcurso de tiempo la conceptualización del sentido numérico, así como la forma en la que se favorece su desarrollo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.</p> <p>Las referencias están en formato APA</p>
Vídeo y guion	<p>Utiliza las Tecnologías de la Información, Comunicación, Conocimiento y Aprendizaje Digital (TICCAD) para elaborar el vídeo y guion.</p> <p>Contiene lo más importante sobre el conjunto de los números naturales y sus propiedades, los números primos y compuestos, el teorema fundamental de la aritmética y las conjeturas de Golbach y la de los números primos gemelos.</p>

## BIBLIOGRAFÍA

A continuación, se presenta un conjunto de textos de los cuales el profesorado podrá elegir aquellos que sean de mayor utilidad, o bien, a los cuales tenga acceso, pudiendo sustituirlos por textos más actuales.

### Bibliografía básica

Friel, S. N., & Carboni, L. W. (2000). Using video-based pedagogy in an elementary mathematics method course. *School Science and Mathematics*, 100(3), 118-127. doi:10.1111/j.1949-8594.2000.tb17247.x.

García, S. (2014). *Sentido numérico. Materiales para Apoyar a la Práctica Educativa*. INEE.

Llinares, S. (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En Castro, E (Ed.). *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (151-176). Síntesis.

Mcintosh, A., Reys, B.J. & Reys, R.E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics*, 12(3), 2-8.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. En D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 245-275). MacMillan Publishing Company.

Trafton, P. R., & Hartman, C. L. (1997). Developing Number Sense and Computational Strategies in Problem-Centered Classrooms. *Teaching Children Mathematics*, 4(4), 230-2033.

Van de Walle, J., & Bowman, W., K. (1993). Early development number sense. In R. Jensen (Ed.) *Research Ideas for the classroom: Early childhood mathematics* (pp. 127-150). MacMillan Publishing Company.

Villalva, M. (2008). *Sentido numérico y pensamiento algebraico*. SEP

## **Bibliografía complementaria**

Anghileri, J. (2006). *Teaching Number Sense, 2nd Edition*. Continuum.

Berch, D. (2005). Making sense of number sense. *Journal of learning disabilities*, 36(4), 333- 339.

Brinnitzer, E., Fernández, G., Pérez, S., Gallego, Ma. F., Collado, Ma. E., & Santamaría, F. (2021). *El juego en la enseñanza de la matemática. Actividades para: número, operaciones, magnitudes y medida, geometría, estadística y probabilidad*. Novedades Educativas.

Cedillo, T. E., & Cruz, V. (2012). *Del sentido numérico al pensamiento prealgebraico*. Pearson.

Faulkner, V. (2009). Components of Number sense: An instructional model for teachers. *Teaching Exceptional Children*, 41(5), 24-30.

Gómez, B. (1995). Tipología de errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 13(3), 313-325.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Síntesis.

Segovia, I. (1997). *Estimación de cantidades discretas*. Estudio de variables y procesos. Comares.

## Videos

<https://www.youtube.com/watch?v=6NgEgPD82Zo>

## Sitios web

[https://arquimedes.matem.unam.mx/primaria/REFiP/R7\\_Calculo\\_mental/index.html](https://arquimedes.matem.unam.mx/primaria/REFiP/R7_Calculo_mental/index.html)

[https://arquimedes.matem.unam.mx/primaria/PDI/M\\_B1\\_JerarquiaOperaciones/index.html](https://arquimedes.matem.unam.mx/primaria/PDI/M_B1_JerarquiaOperaciones/index.html)

[http://geogebra.es/gauss/materiales\\_didacticos/eso/actividades/aritmetica\\_mental.htm](http://geogebra.es/gauss/materiales_didacticos/eso/actividades/aritmetica_mental.htm)

[http://prometeo.matem.unam.mx/recursos/Bachillerato/DGEE\\_DGTIC/?tema=0&subtema=0&pagina=0](http://prometeo.matem.unam.mx/recursos/Bachillerato/DGEE_DGTIC/?tema=0&subtema=0&pagina=0)

<http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centroctc/18601059/helvia/aula/archivos/repositorio/250/354/html/Plan%204-6-09/criba.htm>

[http://geogebra.es/gauss/materiales\\_didacticos/eso/actividades/aritmetica/naturales\\_y\\_enteros/criba\\_de\\_eratostenes/actividad.html](http://geogebra.es/gauss/materiales_didacticos/eso/actividades/aritmetica/naturales_y_enteros/criba_de_eratostenes/actividad.html)

[http://geogebra.es/gauss/materiales\\_didacticos/eso/actividades/aritmetica/naturales\\_y\\_enteros/primos\\_gemelos/actividad.html](http://geogebra.es/gauss/materiales_didacticos/eso/actividades/aritmetica/naturales_y_enteros/primos_gemelos/actividad.html)

## **Unidad de aprendizaje II. Divisibilidad y ecuaciones diofánticas**

### **Presentación**

En esta segunda unidad de aprendizaje se pretende favorecer la comprensión de divisibilidad mediante el uso de la división, la deducción y aplicación de criterios y la obtención del mínimo común múltiplo (m.c.m) y el máximo común divisor (m.c.d), a través de diversos procedimientos y algoritmos dentro de los que se destaca el de Euclides. También se intenta promover la resolución de problemas que implican utilizar el m.c.m y el m.c.d incluyendo el empleo de este último para resolver ecuaciones diofánticas. Asimismo, se quiere contribuir con una construcción adecuada del concepto número entero haciendo énfasis en sus operaciones y propiedades, así como en su uso en la comunidad y en diferentes disciplinas.

### **Propósito de la unidad de aprendizaje**

Se espera que el docente en formación:

Comprenda el conjunto de los números enteros, sus operaciones y propiedades, los criterios de divisibilidad y los diferentes procedimientos para obtener el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor para que sea capaz de resolver problemas así como ecuaciones diofánticas lineales y aplique esos conocimientos al estudiar dichos contenidos matemáticos con sus alumnos de educación básica y media superior.

### **Contenidos**

Los contenidos de la segunda unidad de aprendizaje son los siguientes:

- Divisibilidad
- Criterios de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11
- Máximo común divisor
- Mínimo común múltiplo

- Algoritmo de Euclides
- Ecuaciones diofánticas lineales
- Números enteros, sus operaciones y propiedades

### **Estrategias y recursos para el aprendizaje**

- Estudiar el algoritmo de la división como un proceso de aproximación por medio de los múltiplos de un número natural y establecer las relaciones entre el dividendo, divisor, cociente y residuo algebraicamente.
- Leer el texto 'No se puede dividir por cero' del libro de Paenza (2000, págs. 27 y 28) y discutir al respecto.
- Obtener los múltiplos y divisores de diversos números.
- Proponer lo siguiente:

Sí 4 divide a 12, 11 divide a 121, 256 a 2048, etc.

De manera que:

12 es divisible por 4, 121 es divisible por 11, 2048 es divisible por 256, etc., o bien,

12 es múltiplo de 4, 121 es múltiplo de 11, 2048 es múltiplo de 256, etc.

¿Por qué 999 no divide a 999999?

- Determinar todos los divisores de un número mediante el uso de su descomposición en factores primos.
- Demostrar teoremas sobre el algoritmo de la división.
- Proponer distintos números y preguntar si son o no divisibles por otro(s).
- Deducir los criterios de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11.
- Proponer diferentes procedimientos para obtener el mínimo común múltiplo (m.c.m) de dos o más números.
- Estudiar distintos métodos para determinar el máximo común divisor (m.c.d) de dos o más números.

- Probar el Algoritmo de Euclides como un método antiguo para obtener el m.c.d en el que se usan divisiones y restas haciendo énfasis en su formalización y la demostración del teorema.

Teorema. Sean  $a, b$  números enteros con  $b > 0$ . Definimos por recurrencia  $r_{-1} = a$  y  $r_0 = b$  y, supuestos definidos tales  $r_{k-1}, r_k$  con  $r_k \neq 0$ , definimos  $r_{k+1}$  como el resto de la división euclídea de  $r_{k-1}$  entre  $r_k$ . Entonces, existe un  $n$  tal que  $r_n = 0$ , y se verifica además que  $r_{n-1} = \text{mcd}(a, b)$ .

- Plantear y resolver diversos problemas que se resuelven mediante el uso del mínimo común múltiplo y el máximo común divisor tanto en su entorno considerando varios oficios, como en otras ciencias.
- Determinar si se pueden o no resolver las siguientes ecuaciones diofánticas por medio del uso del algoritmo de Euclides:

$$6x + 51y = 22$$

$$33x + 14y = 115$$

$$14x + 35y = 93$$

- Resolver las ecuaciones diofánticas que aparecen enseguida mediante utilizando el algoritmo euclídeo.

$$56x + 72y = 40$$

$$24x + 138y = 18$$

$$221x + 35y = 11$$

- Construir un mapa mental con la información más importante sobre el conjunto de los números enteros.

## Evaluación de la unidad

Para evaluar la segunda unidad de aprendizaje se propone considerar las evidencias y criterios de evaluación que aparecen enseguida:

Evidencias	Criterios de evaluación
------------	-------------------------

Portafolio	<p>Incluye al menos una evidencia de aprendizaje por cada uno de los diferentes contenidos matemáticos que se estudiaron en clase.</p> <p>Las actividades, así como los problemas fueron resueltos de manera adecuada e incluso algunos de éstos últimos se resolvieron mediante diversas estrategias.</p> <p>Contiene la información más relevante sobre el conjunto de los números enteros.</p>
Póster	<p>Tiene todos los elementos de un póster académico.</p> <p>Incorpora la información más relevante sobre los números enteros considerando sus distintas representaciones, operaciones y propiedades.</p> <p>Las referencias están en formato APA.</p>
Examen	<p>Resuelve correctamente ejercicios, problemas y ecuaciones relacionados con los contenidos que se estudiaron en esta unidad como una muestra de los conocimientos adquiridos.</p>

## BIBLIOGRAFÍA

A continuación, se presenta un conjunto de textos de los cuales el profesorado podrá elegir aquellos que sean de mayor utilidad, o bien, a los cuales tenga acceso, pudiendo sustituirlos por textos más actuales.

### Bibliografía básica

Aguilar, A., Bravo, F. V., Gallegos, H. A., Cerón, M., & Reyes, R. (2009). *Aritmética*. Pearson.

Aguilar, A., Bravo, F. V., Gallegos, H. A., Cerón, M., & Reyes, R. (2009). *Matemáticas simplificadas*. Pearson.

Baldor, A. (2017). *Aritmética*. Grupo Editorial Patria.

Miller, C. D., Heeren, V. E., & Hornsby, E. J. (2013). *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones*. Pearson.

Peterson, J. A., & Hashisaki, J. (2002). *Teoría de la aritmética*. Limusa. Noriega editores.

Pineda, M. (2014). *Enteros, aritmética modular y grupos finitos*. UAM.

### Bibliografía complementaria

Magnus, H. (2005). *El diablo de los números*. Siruela.

Paenza, A. (2000). *Matemática... ¿estás ahí? Sobre números, personajes, problemas y curiosidades*. Siglo XXI Editores.

Zazkis, R. & Campbell, S. R. (1996). Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 540-563.

## Videos

Los números primos más grandes del mundo y ¡el enigma de los números perfectos!

<https://www.youtube.com/watch?v=BGryZFh1Wq8>

## Recursos de apoyo

<https://www.youtube.com/watch?v=FVTzu5p5mWY>

<https://www.youtube.com/watch?v=PgECRJqDpoY>

[https://www.youtube.com/watch?v=F1VdUk4M\\_Ak](https://www.youtube.com/watch?v=F1VdUk4M_Ak)

<https://www.youtube.com/watch?v=9BTaEC2hRHk>

<https://www.youtube.com/watch?v=mbZZwfpZQKk>

<https://www.youtube.com/watch?v=hZJyv9uQ2Dg>

<https://www.youtube.com/watch?v=LVfOS2TLwGc>

## Sitios web

[https://arquimedes.matem.unam.mx/primaria/AprendeMxUNAM\\_fase1/recursos/PA6\\_OA\\_MA\\_3UNAM\\_009/index.html](https://arquimedes.matem.unam.mx/primaria/AprendeMxUNAM_fase1/recursos/PA6_OA_MA_3UNAM_009/index.html)

[http://geogebra.es/gauss/materiales\\_didacticos/eso/actividades/aritmetica/naturales\\_y\\_enteros/divisores\\_y\\_primos/actividad.html](http://geogebra.es/gauss/materiales_didacticos/eso/actividades/aritmetica/naturales_y_enteros/divisores_y_primos/actividad.html)

[https://emtic.educarex.es/crea/matematicas/divisibilidad/encuentra\\_un\\_numero\\_criterios\\_del\\_2\\_3\\_9\\_y\\_10.html](https://emtic.educarex.es/crea/matematicas/divisibilidad/encuentra_un_numero_criterios_del_2_3_9_y_10.html)

[https://emtic.educarex.es/crea/matematicas/divisibilidad/encuentra\\_un\\_numero\\_criterios\\_del\\_2\\_3\\_5\\_y\\_11.html](https://emtic.educarex.es/crea/matematicas/divisibilidad/encuentra_un_numero_criterios_del_2_3_5_y_11.html)

[https://emtic.educarex.es/crea/matematicas/divisibilidad/primos\\_mcm\\_y\\_mcd\\_su\\_magia\\_protege\\_internet.html](https://emtic.educarex.es/crea/matematicas/divisibilidad/primos_mcm_y_mcd_su_magia_protege_internet.html)

[http://geogebra.es/gauss/materiales\\_didacticos/eso/actividades/aritmetica/naturales\\_y\\_enteros/resta\\_enteros/actividad.html](http://geogebra.es/gauss/materiales_didacticos/eso/actividades/aritmetica/naturales_y_enteros/resta_enteros/actividad.html)

<https://www.mersenne.org/>

## **Unidad de aprendizaje III. Aritmética modular y números reales**

### **Presentación**

Esta unidad versa sobre la teoría de congruencias y el conjunto de los números reales haciendo énfasis en sus diversas representaciones, operaciones, propiedades y aplicaciones en la comunidad, así como en otras disciplinas. En un inicio se centra la atención en la aritmética modular y en las dificultades asociadas con el estudio de los números racionales en términos de sus diferentes acepciones y su aplicación en el mundo real. Después se continúa con el estudio de los números irracionales más conocidos tales como:  $\sqrt{p}$  con  $p$  primo,  $\pi$  y  $e$ . Finalmente, se quiere favorecer el uso del principio de inducción matemática y la demostración de teoremas a partir de las propiedades fundamentales de los números reales.

### **Propósito de la unidad de aprendizaje**

Se espera que el docente en formación:

Comprenda la aritmética modular y el conjunto de los números reales, sus operaciones, propiedades y aplicaciones a través de la resolución de problemas, diferentes representaciones, construcciones matemáticas y demostraciones de teoremas para que pueda estudiar sobre estos objetos y conceptos matemáticos con sus estudiantes de educación básica y media superior.

### **Contenidos**

- Aritmética modular
- Congruencias
- Números racionales
- Números reales y sus distintas representaciones
- El principio de inducción matemática
- Demostración de las propiedades de los números reales

## Estrategias y recursos para el aprendizaje

- Resolver los siguientes problemas mediante el uso de congruencias:
  - En un cine cobran la entrada a \$180 los adultos y \$75 menores de edad, un cierto día se recaudaron \$9,000 y asistieron más adultos que menores de edad. ¿Cuáles fueron los números posibles de asistentes?
  - Dos productos A y B cuestan \$71 y \$83 respectivamente por kilo. ¿Qué cantidades enteras de ambos pueden comprarse con \$1,970?
  - La producción diaria de huevos en una granja es inferior a 75, cierto día el recolector informó que la cantidad de huevos recogida fue tal que contando de 3 en 3 sobran 2, de 5 en 5 sobran 4 y de 7 en 7 sobran 5. El capataz le dijo que era imposible ya que estudia está estudiando aritmética. ¿Quién tiene la razón?, ¿por qué?
  - Sí los alumnos de una escuela se colocan de dos, sobra 1, si se distribuyen en filas de 3, sobra 1, lo mismo sucede si se forman en filas de 4, 5 o 6. Al colocarse en filas de 7 no sobra ninguno. ¿Cuántos alumnos hay?
- Identificar tipos de problemas en su entorno que se expresan, plantean y resuelven por medio de congruencias (por ejemplo, el del reloj) para discutir sobre los procedimientos que utilizan los miembros de la comunidad en vinculación con el curso 'Acercamiento a prácticas educativas y comunitarias' del trayecto *Práctica profesional y saber pedagógico*.
- Leer el artículo 'A network of notions, concepts and processes for fractions and rational numbers as an interpretation of Didactical Phenomenology' de Real y Figueras (2015) para que se presente y discuta su contenido por equipos.
- Realizar la construcción de un cuadrado de área igual a 2, ubicar en la recta numérica  $\sqrt{p}$  para distintos valores de  $p$  utilizando el procedimiento geométrico (ver Figura 2).

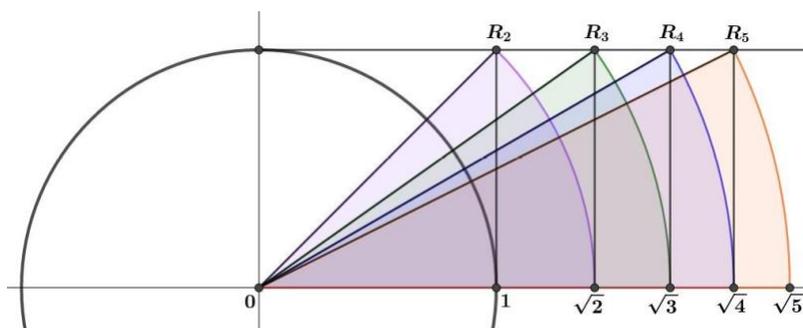


Figura 2. Construcción geométrica para ubicar en la recta numérica  $\sqrt{p}$ .

- A partir de la actividad anterior, demostrar la irracionalidad de  $\sqrt{2}$ .
- Ubicar en la recta numérica a  $\pi$  (ver Velasco, 1970 y Swokowski y Cole, 2009).
- Leer las contribuciones de Ibañes y Ortega (2005) y Solow (1987) sobre el proceso de demostración matemática y su relación con la construcción de una conjetura.
- Revisar la teoría sobre el Principio de Inducción Matemática y realizar los problemas propuestos en Gentil (1985)<sup>8</sup>, Rees y Sparks (1998) y Swokowski y Cole (2009).
- Leer la primera parte<sup>9</sup> de Spivak (2019) y demostrar las propiedades básicas de los números reales.
- Resolver los problemas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12 y 18 de Spivak (2019).

## Evaluación de la unidad

Para evaluar esta unidad de aprendizaje se propone considerar las evidencias y criterios de evaluación que aparecen a continuación:

Evidencias	Criterios de evaluación
------------	-------------------------

<sup>8</sup> Considerar las páginas 16-18, 309-313 y 764-771 respectivamente.

<sup>9</sup> Tomar en cuenta las páginas 3-22.

Problemario	Incluye todos los problemas que se estudiaron en clase sobre congruencias, números racionales y reales.  Los problemas se resolvieron adecuadamente y cuentan con el procedimiento.
Póster	Tiene todos los elementos de un póster académico.  Contiene la información más significativa sobre los números racionales y reales  Las referencias están en formato APA.
Examen	Incluye operaciones y problemas asociados con lo que se estudió en la tercera unidad como una muestra de los conocimientos adquiridos.

## BIBLIOGRAFÍA

A continuación, se presenta un conjunto de textos de los cuales el profesorado podrá elegir aquellos que sean de mayor utilidad, o bien, a los cuales tenga acceso, pudiendo sustituirlos por textos más actuales.

### Bibliografía básica

Aguilar, A., Bravo, F. V., Gallegos, H. A., Cerón, M., & Reyes, R. (2009). *Aritmética*. Pearson.

Aguilar, A., Bravo, F. V., Gallegos, H. A., Cerón, M., & Reyes, R. (2009). *Matemáticas simplificadas*. Pearson.

Gentile, E. R. (1985). *Aritmética elemental*. Organización de los Estados Americanos, OEA.

Rees, P. y Sparks, F. (1998). *Álgebra*. Reverté Ediciones.

Solow, D. (1987). *Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas*. Limusa, Noriega Editores.

Spiegel, M. R. (1986). *Álgebra superior*. McGraw-Hill.

Spivak, M. (2019). *Calculus*. Reverté.

Swokowski, E. W., & Cole, J. A. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Cengage Learning Editores.

Trejo, C. A. (1973). *El concepto de número*. Organización de los Estados Americanos, OEA.

Velasco Coba, F. (1970). *El sistema de los números reales*. National Council of Teachers of Mathematics.

### **Bibliografía complementaria**

Brown, P., Evans, M., Hunt, D., McIntosh, J., Pender, B., & Ramagge, J. (2011). *The real numbers. A guide for teachers-Years 8-10*. Australian Mathematical Sciences Institute.

Hernández, A. O., & Hernández, R. R. O. (2019). El valor de  $\pi$  como límite de perímetros y áreas de polígonos regulares. *Pensamiento Matemático*, 9(2), 7.

Hernández, V. (2002). La geometría analítica de Descartes y Fermat: ¿y Apolonio? *Apuntes de historia de las matemáticas*, 1(1), 32-45.

Ibañes, M., & Ortega, T. (2005). Dimensiones de la demostración matemática en Bachillerato. *Números*, 61, 19-40.

Real, C. R., & Figueras, O. (2015). A network of notions, concepts and processes for fractions and rational numbers as an interpretation of Didactical Phenomenology. *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Charles University in Prague, Faculty of Education; ERME, Feb 2015, Prague, Czech. pp. 346-353. (hal-01281861)

### **Videos**

<https://www.youtube.com/watch?v=3Gdjz60ON4>

<https://www.youtube.com/watch?v=gGWlqg-13hk>

[https://www.youtube.com/watch?v=amSTE\\_gb4qk](https://www.youtube.com/watch?v=amSTE_gb4qk)

### **Recursos de apoyo**

<https://www.youtube.com/watch?v=eHXMT4CuKbY>

<https://www.youtube.com/watch?v=Y7y4gBUZ7m8>

<https://www.youtube.com/watch?v=xOjQ3u7jSLQ>

<https://www.youtube.com/watch?v=HmPpMreucyc>

### **Sitios web**

[http://recursostic.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/reales/quincena1\\_contenidos\\_1a.htm](http://recursostic.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/reales/quincena1_contenidos_1a.htm)

[http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/reales/index4\\_1.htm](http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/reales/index4_1.htm)

## Evidencia integradora del curso

En esta sección se describen las características de la evidencia integradora y sus criterios de evaluación.

<b>Evidencias:</b>	<b>Criterios de evaluación de la evidencia integradora</b>
<p>Proyecto sobre el uso de distintos tipos de números en la comunidad, así como en otras ciencias</p>	<p>Contiene con todos los elementos que caracterizan un proyecto.</p> <p>Se observa un uso de las Tecnologías de la Información, Comunicación, Conocimiento y Aprendizaje Digital (TICCAD).</p> <p>Incluye distintas aplicaciones de los números naturales, enteros, racionales y reales en la comunidad y en otras disciplinas.</p> <p>Las situaciones en las que se utiliza el conocimiento matemático corresponden con la realidad.</p> <p>Da cuenta de los aprendizajes adquiridos durante el curso.</p> <p>Las referencias están en formato APA.</p>

## **Perfil académico sugerido**

Se sugiere que el docente que imparta este curso Sentido numérico y teoría de la aritmética tenga la Licenciatura en Educación Media Superior con especialidad en Matemáticas, Licenciatura en Educación Secundaria con especialidad en Matemáticas, Licenciatura en Matemáticas o áreas afines, de preferencia deberá contar Maestría o Doctorado en Matemática Educativa, o bien, en la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.

Es deseable que tenga experiencia como docente e investigador en Matemática Educativa o Didáctica de las Matemáticas y utilice las Tecnologías de la Información, Comunicación, Conocimiento y Aprendizaje Digital (TICCAD) adecuadamente para estudiar los diversos contenidos de cada unidad de aprendizaje.

## Referencias para la elaboración de este programa

- Burton, D. (2010) *Elementary Number Theory*. McGraw-Hill.
- Castro, E., Castro, E., & Rico, L. Aprendiendo a multiplicar y dividir. En V. Bermejo (Ed.) *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor*, (pp. 315-346). Editorial CCS.
- Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving Equations: The transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 12-25.
- Friel, S. N., & Carboni, L. W. (2000). Using video-based pedagogy in an elementary mathematics method course. *School Science and Mathematics*, 100(3), 118-127. doi:10.1111/j.1949-8594.2000.tb17247.x.
- García, S. (2014). *Sentido numérico. Materiales para Apoyar a la Práctica Educativa*. INEE.
- Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22 (13), 170-218. <http://dx.doi.org/10.2307/749074>
- Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. John Murray Publisher.
- Mcintosh, A., Reys, B.J. & Reys, R.E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics*, 12(3), 2-8.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, NCTM.
- Reys, R., Reys, B., Mcintosh, A., Emanuelsson, G., Johansson, B. y Yang, D.C. (1999). Assessing number sense of students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. *School Science and Mathematics*, 99(2), 61-70. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1949-8594.1999.tb17449.x>
- Reys, R. E., & Yang, D. (1998). Relationships between the computational performance and number sense among sixth

and eighth grades in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(2), 225-237.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Síntesis.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. En D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 245-275). MacMillan Publishing Company.

Trafton, P. R., & Hartman, C. L. (1997). Developing Number Sense and Computational Strategies in Problem-Centered Classrooms. *Teaching Children Mathematics*, 4(4), 230-2033.

Van de Walle, J., & Bowman, W., K. (1993). Early development number sense. In R. Jensen (Ed.) *Research Ideas for the classroom: Early childhood mathematics* (pp. 127-150). MacMillan Publishing Company.

Wagner, D. y Davis, B. (2010). Feeling number: grounding number sense in a sense of quantity. *Educational studies in Mathematics*, 74, 39-51. <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-009-9226-9>

Yang, D. (2003). Teaching and learning number sense – an intervention study of fifth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1 (1), 115-134.