EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Licenciatura en Enseñanza
y Aprendizaje de las Matemáticas

Plan de Estudios 2022

Estrategia Nacional de Mejora
de las Escuelas Normales

Programa del curso

Cálculo integral

Quinto semestre

Primera edición: 2024
Esta edición estuvo a cargo de la Dirección General
de Educación Superior para el Magisterio
Av. Universidad 1200. Quinto piso, Col. Xoco,
C.P. 03330, Ciudad de México

Trayecto formativo: **Formación pedagógica, didáctica e interdisciplinar**

Carácter del curso: **Currículo Nacional Base** Horas: **4** Créditos: **4.5**

Índice

Propósito y descripción general del curso

Propósito general

En el curso Cálculo integral[1] se espera que el estudiantado normalista tome decisiones informadas y fortalezca sus habilidades de modelación de situaciones de la ciencia y la tecnología, mediante una comprensión sólida de los fenómenos de acumulación y su interpretación aritmética, gráfica y algebraica. Con la finalidad de contribuir de manera significativa a la comunidad y fortalecer sus capacidades de diseño didáctico a favor de sus estudiantes.

Antecedentes

Al igual que en la educación normal, y en general en la educación superior, Milevicich (2008) refiere que en función de los conocimientos previos que poseen los estudiantes de primer año de la carrera de Ingeniería, el análisis detallado de los materiales utilizados por los docentes de nivel medio y de los escritos de los alumnos, permiten inferir que el concepto de integral se enseña como antiderivada, poniendo el acento en aspectos algebraicos.

La investigadora reporta que los contenidos en el apartado de Cálculo Integral generalmente siguen el orden siguiente: cálculo de primitivas, métodos de integración, la integral definida (Regla de Barrow) y aplicaciones de la integración (cálculo de áreas y volúmenes).

Esta presentación impone la memorización del algoritmo y contraviene al desarrollo del pensamiento matemático avanzado en forma intuitiva y reflexiva. Mucho menos, el sentido que tiene este concepto favorece su uso en actividades cotidianas de la ciencia y tecnología.

De hecho, el predominio del lenguaje algebraico y algorítmico en la enseñanza de la integral de una función, se producen significaciones limitadas y dificultades para la resolución de problemas (Grijalva y Dávila, 2020). Lo que imposibilita el trabajo mediante y para proyectos comunitarios.

Por el contrario, una presentación a partir de la resolución de problemas en situaciones y contextos diversos favorecerá el desarrollo flexible del

[1] Esta versión es una adaptación del curso del mismo nombre, diseñado para la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria, Plan de estudios 2018. La versión original pertenece al acervo intelectual del normalismo mexicano y fue recuperado de la Página Web de la Secretaría de Educación Pública-Dirección General de Educación Superior para el Magisterio: https://dgesum.sep.gob.mx/planes2018

pensamiento matemático que se puede complementar con su reversibilidad, por lo que se debe proponer un planteamiento a partir del establecimiento de la relación del área con algunos contextos como la velocidad o el crecimiento exponencial de una población, ya sea de tipo humana o animal.

Aunado a lo anterior, la formación del concepto de integral por modelación se puede ver favorecido en su asimilación mediante problemas de aplicación, ya que los resultados de su tratamiento apuntan a su uso en tareas diversas y no sólo a las que son propias de la especialidad (Bravo y Rodríguez, 2020).

A modo de reflexión sobre el concepto de área, Rivera (2014) refiere que, si bien es cierto que el concepto de integral tiene su génesis en el problema de calcular áreas de regiones, a lo largo de la historia ha adquirido su identidad propia y se hizo independiente.

En el mismo sentido, Abreu, Canavati, Ize y Minzoni (1988) destacan esa evolución a partir de la necesidad de calcular el área de un círculo, cuyo objeto de estudio potenció el desarrollo del cálculo integral, pues se generalizó en el cálculo del área de la curva de una función.

Descripción

Este curso corresponde al quinto semestre de la Licenciatura en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y forma parte de la fase de profundización del trayecto formativo: Formación pedagógica, didáctica e interdisciplinar. Es un curso que va a abonar de forma predominante a su formación como docente de educación media superior y la formación para adultos, en virtud de las problemáticas y proyectos que es susceptible plantear en el aula de la escuela normal y en vinculación con la comunidad. Asimismo, también brinda un horizonte de comprensión del tipo de conocimientos interdisciplinarios susceptibles de ser abordados en la escuela secundaria, con la finalidad de preparar a los distintos miembros de la comunidad escolar para arribar a planteamientos más complejos en niveles superiores.

Dada la carga horaria, se propone el abordaje de dos unidades: en la primera se presentan problemas y proyectos interdisciplinarios que requieren para su abordaje de expresiones funcionales de una interpretación del área bajo la curva, además de algoritmos para su resolución. En la segunda unidad se profundiza sobre la integral definida, por lo que se recurre a la modelación e interpretación gráfica.

Cursos con los que se relaciona

El centro de la construcción de los saberes docentes de los futuros profesores de matemáticas está centrado en la investigación y la innovación de la práctica docente que, si bien se aborda metodológicamente en el curso *Investigación e innovación de la práctica docente* del trayecto formativo Práctica profesional y saber pedagógico, este curso brinda bases para la innovación centrada en la posibilidad que tiene el cálculo integral de ser al mismo tiempo herramienta para la modelación de situaciones, una metodología de trabajo matemático para entender otros ámbitos de las matemáticas y de las ciencias naturales y sociales, y un lenguaje organizador que brinda herramientas para el desarrollo del pensamiento crítico y sistémico.

También es importante mencionar la recuperación de técnicas y procedimientos del cálculo integral en el estudio de diversos cursos como la de los procesos de aprendizaje que se hace en el curso *Procesos cognitivos y cambio conceptual en matemáticas y ciencias*.

Este curso también se relaciona con *Estadística inferencial* que se encuentra en el mismo semestre, pues ésta requiere del cálculo del área bajo la curva de distribuciones de funciones de probabilidad, por lo que es deseable que se utilice la herramienta, ya sea de manera intuitiva mediante sumas, de Riemann, o mediante la integral definida.

Finalmente, diversos cursos de la flexibilidad curricular que están asociados con las necesidades específicas de los contextos del país estarán en vinculación con este curso, dado su carácter de herramienta que, en ambientes de aprendizaje favorables, posibilitará el desarrollo de capacidades.

Responsables del codiseño del curso

La versión original de este curso fue diseñado por personas especialistas en la materia y en el diseño curricular provenientes de las siguientes instituciones: Carlos Bosch Giral del Instituto Tecnológico Autónomo de México e integrante de la Academia Mexicana de la Ciencia; Alejandra Ávalos Rogel de la Escuela Normal Superior de México; Saúl Elizarrarás Baena de la Escuela Normal Superior de México; Vitaliano Acevedo Silva de la Escuela Normal Superior de México; Oliver Antonio Juárez Romero de la Escuela Normal Superior Oficial de Guanajuato. Especialistas en diseño curricular: Julio César Leyva Ruiz, Gladys Añorve Añorve, Sandra Elizabeth Jaime Martínez, María del

Pilar González Islas, de la Dirección General de Educación Superior para el Magisterio.

La adaptación de este curso para la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, Plan de estudios 2022, estuvo a cargo de: Francisco Juárez Lucas de la Escuela Normal Superior Oficial de Guanajuato; Alejandra Avalos Rogel de la Escuela Normal Superior de México; Mario Alberto Quiñonez Ayala de la Escuela Normal Superior de Hermosillo.

Dominios y desempeños del perfil de egreso a los que contribuye el curso

Perfil general

La egresada y el egresado es un docente profesional de la educación que:

Es capaz de contextualizar el proceso de aprendizaje e incorporar temas y contenidos locales, regionales, nacionales y globales significativos; planifica, desarrolla y evalúa su práctica docente al considerar las diferentes modalidades y formas de organización de las escuelas. Diseña y gestiona ambientes de aprendizaje presenciales, híbridos y a distancia, respondiendo creativamente a los escenarios cambiantes de la educación y el contexto; posee saberes y dominios para participar en la gestión escolar, contribuir en los proyectos de mejora institucional, fomentar la convivencia en la comunidad educativa y vincular la escuela a la comunidad.

Cuenta con una formación pedagógica, didáctica y disciplinar sólida para realizar procesos de educación inclusiva de acuerdo al desarrollo cognitivo, psicológico, físico de las y los estudiantes, congruente con su entorno sociocultural; es capaz de diseñar, realizar y evaluar intervenciones educativas situadas mediante el diseño de estrategias de enseñanza, aprendizaje, el acompañamiento, el uso de didácticas, materiales y recursos educativos adecuados, poniendo a cada estudiante en el centro del proceso educativo como protagonista de su aprendizaje.

Produce saber y conocimiento pedagógico, didáctico y disciplinar, reconoce y valora la investigación educativa y la producción de conocimiento desde la experiencia; sabe problematizar, reflexionar y aprender de la práctica para transformarla; ha desarrollado dominios metodológicos para la narración pedagógica, la sistematización y la investigación; está preparado para crear, recrear e innovar en las relaciones y el proceso educativo al trabajar en comunidades de aprendizaje e incorporar en su quehacer pedagógico teorías contemporáneas y de frontera en torno al aprendizaje y al desarrollo socioemocional.

Desarrolla el pensamiento reflexivo, crítico, creativo y sistémico y actúa desde el respeto, la cooperación, la solidaridad, la inclusión y la preocupación por el bien común; establece relaciones desde un lugar de responsabilidad y colaboración para hacer lo común, promueve en sus relaciones la equidad de género y una interculturalidad crítica de diálogo, de reconocimiento de la diversidad y la diferencia.

Utiliza las herramientas y tecnologías digitales, para vincularse y aprender, comparte lo que sabe, impulsa a sus estudiantes a generar trayectorias personales de aprendizaje y acompaña su desarrollo y maduración como personas.

Dominios del saber: saber ser y estar, saber conocer y saber hacer

- Conoce el Sistema Educativo Nacional y domina los enfoques y contenidos de los planes y programas de estudio, los contextualiza e incorpora críticamente contenidos locales, regionales, nacionales y globales significativos.
- Planifica, desarrolla y evalúa la práctica docente de acuerdo con diferentes formas de organización de las escuelas (completas, multigrado) y gestiona ambientes de aprendizaje presenciales, híbridos y a distancia.
- Hace investigación, produce saber desde la reflexión de la práctica docente y trabaja comunidades de aprendizaje para innovar continuamente la relación educativa, los procesos de enseñanza y de aprendizaje para contribuir en la mejora del Sistema Educativo Nacional.
- Reconoce las culturas digitales y usa sus herramientas y tecnologías para vincularse al mundo y definir trayectorias personales de aprendizaje, compartiendo lo que sabe e impulsa a las y los estudiantes a definir sus propias trayectorias y acompaña su desarrollo como personas.

Perfil profesional de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas

Utiliza las Matemáticas y su didáctica para hacer transposiciones didácticas, de acuerdo con las características, contextos, saberes del estudiantado, a fin de abordar los contenidos curriculares de los planes y programas de estudio vigentes del nivel básico.

- Articula el conocimiento de la matemática, su didáctica y el saber de otras disciplinas, mediante la recuperación de saberes comunitarios, para conformar marcos explicativos y de intervención eficaces entre el estudiantado.
- Aplica la articulación, los propósitos, los contenidos y el enfoque de enseñanza de las matemáticas, e incorpora el trabajo reflexivo y

comprensivo de los contenidos para facilitar la enseñanza y aprendizaje de la disciplina.

Diseña procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, de acuerdo con la didáctica y sus enfoques vigentes, considerando los diagnósticos grupales y contextuales, los entornos presenciales o virtuales, así como situaciones que fortalecen las habilidades socioemocionales.

- Utiliza información del contexto, los conocimientos pluriculturales y las diferencias y desigualdades de la población escolar que atiende, en cuanto a sus niveles de desarrollo cognitivo, psicológico, físico y socioemocional, para proponer situaciones y estrategias diferenciadas tendientes a superar barreras para el aprendizaje y la participación.
- Relaciona el conocimiento de las matemáticas con los propósitos, contenidos y enfoques de otras disciplinas, propiciando un conocimiento integral de la ciencia, relacionándolos con fenómenos de su vida cotidiana.
- Utiliza el lenguaje matemático para la resolución de problemas situados o contextualizados.
- Expresa la relación entre dos variables utilizando distintos modelos de representación: tabular, gráfico y algebraico para resolver problemas situados o contextualizados.
- Planea experiencias de aprendizaje, de acuerdo con los estilos y ritmos de aprendizaje, las necesidades, intereses y desarrollo cognitivo de estudiantes; en entornos multimodales, presenciales, a distancia, virtuales o híbridos.

Articula las distintas ramas de las Matemáticas con otras disciplinas, para facilitar el análisis de una situación modelada, desde el pensamiento complejo, que favorezca el desarrollo del pensamiento lógico-matemático del alumnado que atiende.

- Analiza diferentes problemas, situaciones o fenómenos para proponer modelos matemáticos desde una visión integradora y transdisciplinaria como un medio para el diseño e implementación de secuencias didácticas que favorezcan su resolución.
- Relaciona sus conocimientos de las Matemáticas con los contenidos de otras disciplinas desde una visión integradora, multidisciplinaria, interdisciplinaria y transdisciplinaria para propiciar el aprendizaje de sus estudiantes.

Resuelve problemas a partir del análisis crítico de la información cuantitativa y cualitativa derivada del pensamiento matemático.

- Propicia el análisis reflexivo y crítico de información cualitativa y cuantitativa derivado del pensamiento matemático con la intención de que el alumnado organice información en tablas, gráficas y construya sus estrategias para validar las conjeturas derivadas de los datos cualitativos y cuantitativos que se trabaje.
- Analiza fenómenos sociales, naturales, económicos y políticos para comprender y utilizar diversas aplicaciones de la probabilidad.

Evalúa los avances, logros y desempeños, desde un enfoque formativo e inclusivo, para lo cual, aplica los tipos, modelos y momentos de la evaluación, y usa la información en la realimentación oportuna al alumnado y en el análisis de su práctica profesional, con objeto de favorecer el aprendizaje e inhibir la reprobación o abandono escolar.

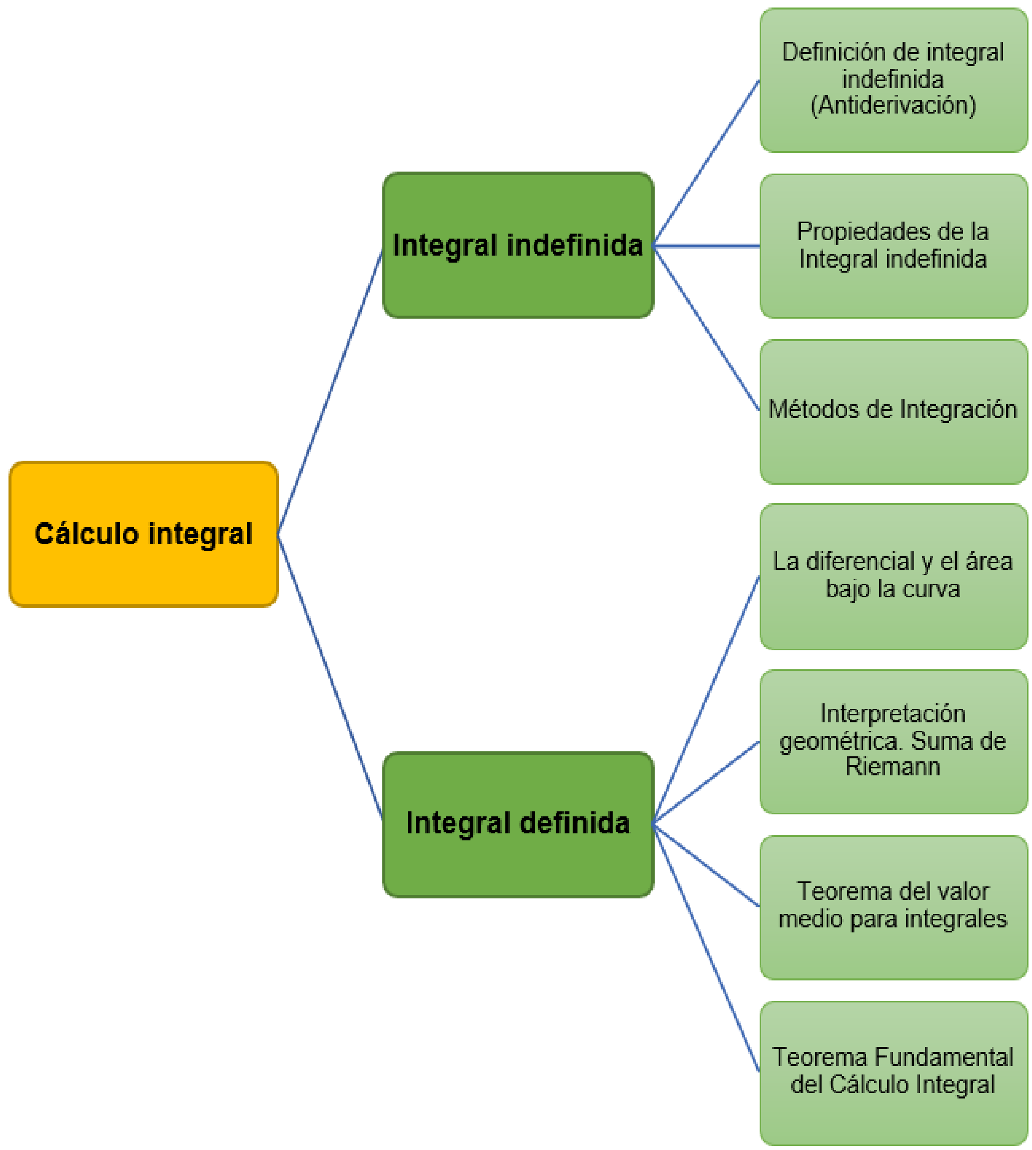
- Emplea los distintos tipos, momentos, modelos, instrumentos, recursos y metodologías de la evaluación formativa para monitorear de manera diferenciada los desempeños y logros el aprendizaje de su grupo, considerando la especificidad de las Matemáticas, los tipos de saberes matemáticos, los ritmos y estilos de aprendizaje individual y colectivo, así como los enfoques vigentes en la educación básica.

Utiliza críticamente la innovación didáctica y tecnológica en la educación, como parte de su práctica docente, para favorecer el pensamiento lógico matemático, el desarrollo del pensamiento crítico y reflexivo y la formación integral del alumnado, desde una visión crítica, humanista, solidaria y con sentido ético-político.

- Utiliza de manera ética y crítica las Tecnologías de la Información, Comunicación, Conocimiento y Aprendizaje Digital (TICCAD), como herramientas mediadoras para construcción del aprendizaje matemático, en diferentes plataformas y modalidades multimodales, presenciales, híbridas y virtuales o a distancia, para favorecer la significatividad de los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- Aplica sus habilidades digitales en diversos contextos, al participar de manera crítica y reflexiva, en comunidades de trabajo académico y redes de colaboración, para compartir experiencias sobre la docencia o en la investigación de la enseñanza de las matemáticas.

Estructura del curso

En el siguiente gráfico, se presenta la estructura del curso, organizada en dos unidades de aprendizaje y los temas que se desarrollarán en cada una de ellas a lo largo del semestre.



Orientaciones para el aprendizaje y enseñanza

El curso *Cálculo integral* está conformado por dos unidades en las que se desarrollan actividades orientadas al aprendizaje y aplicación del conocimiento disciplinar con y sin tecnología. Sin embargo, es altamente recomendable que el docente titular genere espacios reflexivos para debatir sobre las implicaciones que tiene poseer una herramienta matemática para abordar situaciones de la vida comunitaria de manera más eficiente, contribuir al desarrollo de capacidades, en particular las asociadas al fortalecimiento del pensamiento crítico de las personas en la toma de decisiones fundamentada, y tener las bases para analizar problemas de manera inter, multi y transdisciplinaria.

Con ello, se pretende que el estudiantado pueda diseñar como evidencia integradora del curso, una compilación de diversas situaciones de la ciencia, las matemáticas y la tecnología que sean susceptibles de modelarse con algoritmos del cálculo integral, con y sin tecnología, y que abone a la evidencia integradora común del semestre que consiste en la escritura de la experiencia docente y un informe de evaluación de resultados de la implementación de la propuesta de proyectos innovadores.

También, la vinculación con el resto de los cursos del mismo semestre favorecerá el planteamiento de situaciones inter, multi y transdisciplinares que requieran de herramientas matemáticas de optimización, de obtención de medidas de manera indirecta.

Por lo anterior, es importante hacer hincapié que este curso tiene un énfasis en el aspecto tecnológico que está asociado fuertemente con conocimientos y habilidades en el área de ingeniería, que es la de más reciente incorporación en la propuesta del modelo STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics). Glancy y Moore (2013, cit. in Rojas y Segura, 2019, p. 13), reconocen que la educación en STEM potencia el aprendizaje cuando se considera “[...] el razonamiento lógico, causal y deductivo en las matemáticas, el diseño y optimización de procesos en ingeniería, la indagación en ciencias, así como el pensamiento computacional en los campos de la tecnología”.

El enfoque de STEM implica la inclusión de prácticas y proyectos que recurren a la ciencia, la tecnología, la ingeniería, las artes y las matemáticas de manera interdisciplinaria, transdisciplinaria e integrada, que tienen en el centro problemas no triviales y complejos, y que requiere de habilidades como el pensamiento creativo, el trabajo colaborativo, el pensamiento crítico, la comunicación efectiva; actitudes como la proclividad a la innovación, el desarrollo sostenible y el bienestar social; y valores como la democracia, la inclusión, el respeto a la diversidad natural y social, y por la dignidad humana.

Proyecto integrador

El Plan de estudios de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas establece que “Al término de cada curso se incorporará una evidencia o proyecto integrador desarrollado por el estudiantado, de manera individual o en equipos como parte del aprendizaje colaborativo, que permita demostrar el saber ser y estar, el saber, y el saber hacer, en la resolución de situaciones de aprendizaje. Se sugiere que la evidencia final sea el proyecto integrador del semestre, que permita evidenciar la formación holística e integral del estudiantado y, al mismo tiempo, concrete la relación de los diversos cursos y trabajo colaborativo, en academia, las maestras y maestros responsables de otros cursos que constituyen el semestre, a fin de evitar la acumulación de evidencias fragmentadas y dispersas” (SEP 2022, p. 31).

Por lo que el resultado del proyecto integrador que se sugiere para este quinto semestre, es la intervención pedagógica, que se resume a una estrategia educativa planificada y ejecutada con el propósito de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje y abordar problemáticas específicas en el ámbito educativo. Este enfoque comienza planificación y diseño, donde se definen objetivos claros basados en un diagnóstico previo que identifica las necesidades y problemáticas del grupo de estudiantes. La intervención se contextualiza para adaptarse al entorno específico de los estudiantes, considerando sus características culturales, socioeconómicas y educativas, asegurando así la relevancia de los contenidos y métodos utilizados.

Una característica esencial de la intervención pedagógica es la participación activa de los estudiantes, promoviendo su involucramiento en su propio proceso de aprendizaje y fomentando la colaboración entre docentes, estudiantes, familias y la comunidad. Además, la flexibilidad es fundamental, permitiendo ajustes y modificaciones según las circunstancias y los resultados obtenidos durante la implementación, incorporando enfoques innovadores y creativos en la enseñanza.

La intervención pedagógica es especialmente relevante, ya que les proporciona herramientas y estrategias para abordar diversas problemáticas educativas de manera efectiva y equitativa. Al familiarizarse con este enfoque, los futuros docentes desarrollan habilidades para diseñar y aplicar intervenciones que mejoren el aprendizaje de sus estudiantes, fomenten la inclusión y promuevan un ambiente educativo justo y equitativo. Además, les permite mantenerse actualizados con las innovaciones pedagógicas y adoptar una actitud reflexiva y crítica hacia su propia práctica docente, contribuyendo significativamente a la mejora continua de la educación matemática.

En este proyecto, también es relevante el diseño de una estrategia y su justificación, para lo cual deberá recurrir a los saberes conceptuales y metodológicos abordados en su trayectoria en las aulas de la escuela normal, las construcciones y documentos reflexivos que ha elaborado en su trabajo docente en las aulas de la educación obligatoria, las descripciones de las comunidades en las que ha incursionado, la problematización de sus prácticas y la sistematización de los saberes a partir de las innovaciones.

En caso de que no sea posible la implementación el estudiante deberá hacer un ejercicio de construcción de escenarios futuribles, en función de las condiciones institucionales. En caso de su implementación, aunque sea parcial, el estudiante deberá considerar que es una buena oportunidad para la indagación, ya sea la de su propia práctica o la de la comunidad, hacer explícito el componente metodológico del análisis y reflexión de la práctica.

Finalmente, es importante que afine la escritura académica y profundice en los formatos de redacción, de citación y referenciación.

Sugerencias de evaluación

La evaluación es un proceso permanente que permite valorar gradualmente la manera en que cada estudiante moviliza sus conocimientos, pone en juego sus destrezas y desarrolla nuevas actitudes utilizando los contenidos conceptuales y procedimentales que el curso propone.

Este apartado brinda algunas sugerencias a considerar sobre los aprendizajes a lograr y a demostrar en cada una de las unidades del curso, así como su integración final. De este modo se propicia la elaboración de evidencias parciales para las unidades de aprendizaje y una evidencia final para la evaluación del curso.

Con relación a la acreditación de este curso, se retoma el numeral 1.14 del Plan de estudios de la Licenciatura en enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, que en su inciso *k)* refiere "La calificación global se constituye de dos partes:

1. La suma de las unidades tendrá un valor del 50% de la calificación.
2. La evidencia integradora o Proyecto integrador tendrá el 50% que complementa la calificación global." (SEP 2022, pág. 31).

Las sugerencias de evaluación, como se propone en el Plan de estudios 2022, consisten en un proceso de recolección de evidencias sobre un desempeño competente del estudiante con la intención de construir y emitir juicios de valor a partir de su comparación con un marco de referencia constituido por los dominios y desempeños del perfil de egreso y los criterios de evaluación; al igual que en la identificación de aquellas áreas que requieren ser fortalecidas para alcanzar el nivel de desarrollo esperado en cada uno de los cursos del Plan de estudios y, en consecuencia, en el perfil de egreso.

De ahí que las evidencias de aprendizaje se constituyan no sólo en el producto tangible del trabajo que se realiza, sino particularmente en el logro del saber, hacer, ser y estar.

Evidencias de aprendizaje

A continuación, se presenta el concentrado de evidencias que se proponen para este curso, en la tabla se muestran cinco columnas, que, cada docente titular o en colegiado, podrá modificar, retomar o sustituir de acuerdo con los perfiles cognitivos, las características, al proceso formativo, y contextos del grupo de normalistas que atiende.

Unidad de aprendizaje	Evidencias de aprendizaje	Descripción	Instrumento	Ponderación
Unidad 1	Applet, para modelar las situaciones de la comunidad recopiladas paulatinamente a lo largo de la unidad en un **blog grupal**, previamente y durante las jornadas de acercamiento a la práctica, y que pueden ser modeladas con integrales indefinidas.	Son productos digitales elaborados con diversos soportes tecnológicos (excel, geogebra, python, etc.), de acuerdo con los saberes de los estudiantes y del formador, que atienda el uso crítico de la tecnología para favorecer el pensamiento lógico matemático, el establecimiento de relaciones funcionales algebraicas y trascendentes entre variables, y la posibilidad de la obtención de integrales indefinidas. El blog es una compilación grupal de los productos de las actividades realizadas en esta unidad, considerando una reflexión matemática y didáctica sobre el aprendizaje y la enseñanza que podrían incluir: Línea del tiempo, cuadro comparativo, estudio de casos, compilación de situaciones cotidianas, proyectos breves.	Rúbrica	50%
Unidad 2	Applet, para modelar las situaciones de la comunidad recopiladas paulatinamente a lo largo de la unidad en un **blog grupal**, previamente y durante las jornadas de acercamiento a la práctica, y que pueden ser	Es un producto digital elaborado con diversos soportes tecnológicos (excel, geogebra, python, etc.), de acuerdo con los saberes de los estudiantes y del formador, que atienda el uso crítico de la tecnología para favorecer el pensamiento lógico matemático, el establecimiento de relaciones funcionales algebraicas y trascendentes entre variables, y la posibilidad de la	Rúbrica	

	modeladas con integrales definidas.	obtención de integrales definidas. Compilación organizada de problemas que hagan uso del cálculo, particularmente la integral definida. El Blog deberá incluir una presentación interactiva con el abordaje, al menos tres situaciones problema que muestren el uso de la integral definida. Socialización ante el grupo del blog.		50%
Evidencia integradora	Blog con propuestas de situaciones problema y proyectos con metodologías ABP y STEM, cuya modelación y solución requiera del Cálculo integral. El blog está acompañado de un documento escrito con el análisis y reflexión de los productos de las actividades realizadas en este curso, argumentando su innovación a partir de su impacto matemático y didáctico en la toma de decisiones didácticas, y su organización.	Blog con los productos de las actividades realizadas en esta unidad, considerando una reflexión matemática y didáctica, que incluiría: Informe de las situaciones problemas y proyectos implementados. Retroalimentación de los logros alcanzados por el estudiantado a partir de la reflexión de su propio desempeño con base en una lista de cotejo apegada a las características de las situaciones de aprendizaje propuestas para esta unidad. Presentación sobre el análisis de situaciones relacionadas con el mundo real y resolución de problemas prácticos, relacionados con el contexto, que requieran el uso de integrales Simulación de experimentos aplicando cálculo integral utilizando GeoGebra.	Rúbrica	

Unidad de aprendizaje I. Integral indefinida

Si bien, tradicionalmente el trabajo algorítmico es muy fuerte cuando se aborda este tema, y aunque se presenta una organización curricular por temas, se sugiere que las actividades ofrezcan situaciones que requieren de la interdisciplina, trans o multidisciplina, que se analicen las situaciones que tuvo que enfrentar la humanidad para llegar a este conocimiento matemático, y ofrecer el desarrollo de algunos proyectos, por lo tanto, es posible que la secuencia de actividades no corresponda de manera biunívoca con el listado de temas.

También es importante que el estudiantado demuestre de manera axiomática y práctica algunas de las propiedades de las integrales.

Finalmente, en educación este tipo de cursos se ofrecen en la educación media superior ya avanzados los estudios, o en áreas específicas de matemáticas y ciencias, por lo que es muy importante alentar a las estudiantes y buscar estrategias de resiliencia para que se incorporen a los equipos de trabajo sin violencia.

Propósito de la unidad de aprendizaje

Que el estudiantado normalista proponga aproximaciones inter, multi o transdisciplinares, a partir del estudio de fenómenos de acumulación y sus propiedades al resolver problemas matemáticos y modelar situaciones del mundo real. Con la finalidad de desarrollar habilidades analíticas y críticas que les permitan diseñar estrategias didácticas innovadoras y efectivas para sus futuros estudiantes.

Contenidos

Para la primera unidad se sugiere abordar los siguientes temas:

- Definición de integral indefinida (Antiderivación), y análisis de problemas que le dieron origen.
- Propiedades de la integral indefinida.
- Métodos de Integración.
    - Integración directa.
    - Integración sustitución.

  - Integración por partes.
  - Integrales de tablas.
- Integración de fracciones parciales.
- Integración de funciones trigonométricas.

Estrategias y recursos para el aprendizaje

A continuación, se presentan algunas sugerencias de actividades para desarrollar las capacidades del estudiantado, no obstante, cada docente está en la libertad de modificar, sustituir o adaptarlas al contexto y necesidades de su grupo.

El desarrollo del curso requiere una metodología equilibrada para que los estudiantes no sólo comprendan los conceptos teóricos del cálculo integral, sino que también desarrollen habilidades prácticas a través de proyectos aplicados a situaciones reales. La inclusión de un proyecto con tales características permite a los estudiantes reconocer la relevancia del cálculo integral en diversos campos, incentivando un aprendizaje más profundo y aplicado. Además de incorporar el acceso a herramientas como Mathematica, MATLAB, o GeoGebra para realizar cálculos y visualizaciones.

Para desarrollar el proyecto sugerido, se recomienda considerar experiencias similares con otros estudiantes de nivel superior (Dorado y Díaz, 2019; Díaz, 2021) y adaptar las condiciones al contexto de trabajo. Una estructura para organizar la actividad es la siguiente:

- Etapa 1. Al comienzo del curso se selecciona un artículo en inglés relacionado con algún campo de trabajo de interés (Química, Biología, Medicina, Ingeniería, etc.). Se recomienda construir un banco de artículos y un resumen sobre su contenido para facilitar la elección, además de evaluar la pertinencia de diversificar las temáticas e incluir alguna problematización relacionada con el proyecto integrador que se propone desarrollar en quinto semestre.
- Etapa 2. Los estudiantes entregan una traducción del idioma inglés al español del artículo, por lo que se representa una oportunidad de trabajo interdisciplinar con las y los docentes del trayecto de inglés y matemáticas.
- Etapa 3. En esta etapa el estudiante entrega un ensayo sobre el tema del artículo, señalando los componentes que conoce y determinando

la información adicional que requiere. La actividad concluye con el diseño de, al menos, dos entrevistas con especialistas en el campo sobre el cual trata el artículo.

- Etapa 4. Se elabora un reporte con los resultados y hallazgos de las entrevistas con los especialistas y se complementa la información con material bibliográfico adicional.
- Etapa 5. Entrega de un documento académico donde se aprecie cualitativamente que se comprende el tema, incluye discriminación del método y solución matemática del mismo. Además de apegarse a una estructura consensuada por los docentes y estudiantes participantes en la experiencia.
- Etapa 6. Entrega de una presentación del trabajo y una presentación oral de 20 minutos ante el grupo y con una sesión de 5 minutos de preguntas, que puede incluir la invitación, como apoyo, de alguno de los especialistas sobre el tema del artículo.

Se espera que, fruto de la experiencia, las y los estudiantes puedan reconocer la contribución de las disciplinas que están involucradas, las dificultades se tienen en la docencia con el desarrollo de este tipo de actividades y resignificar el conocimiento matemático en el contexto de proyectos (qué significados adquieren los objetos y relaciones matemáticos). Por lo anterior, se sugiere la vinculación con el curso *Procesos cognitivos y cambio conceptual en matemáticas y ciencias*, para identificar los procesos cognitivos involucrados en el desarrollo de la tarea.

1. Si el tiempo y el grupo lo permiten, es posible solicitar que indaguen cómo ha sido resuelto el problema en el que se basa el proyecto, desde otras áreas o ámbitos de las ciencias: cómo se ocupa el cálculo integral, y qué significados se le ha otorgado. Es importante hacer explícita las metodologías con la que se van a abordar las actividades propuestas: ABP, STEM, Aprendizaje servicio, Aproximación experimental, entre otros. Además de promover trabajo colaborativo que incluya equipos con diferentes estilos de aprendizaje, y alentar a las adolescentes y jóvenes en una participación activa, para fomentar el incremento de la presencia femenina en actividades STEM.

De forma complementaria al ejercicio de investigación aplicada sugerido, se pueden incluir actividades de investigación breves durante las sesiones de clase, donde se aborden situaciones problema relacionadas con el crecimiento poblacional y permita atender las dudas de los estudiantes durante el desarrollo. A continuación, se presenta el siguiente proyecto de Díaz, J. L. (2023, pág. 1).

Crecimiento de poblaciones.

A finales del siglo XVIII se estimuló el interés en saber cómo tienden a crecer las poblaciones cuando Thomas Malthus (1766-1834) publicó su "Ensayo sobre el principio de la población tal como afecta a la futura mejora de la sociedad". En su libro, Malthus presentó un modelo de crecimiento exponencial para la población humana y llegó a la conclusión de que, con el tiempo, la población excedería la capacidad de producir un suministro adecuado de alimentos. Aunque los supuestos del modelo maltusiano omiten factores importantes para el crecimiento de la población (por lo que el modelo ha demostrado ser inexacto para los países desarrollados tecnológicamente), es instructivo examinar este modelo como base para un refinamiento posterior. En este proyecto el problema a resolver es: Supóngase que se conoce una población en un tiempo dado t0, estamos interesados en predecir la población P en un tiempo futuro t1.

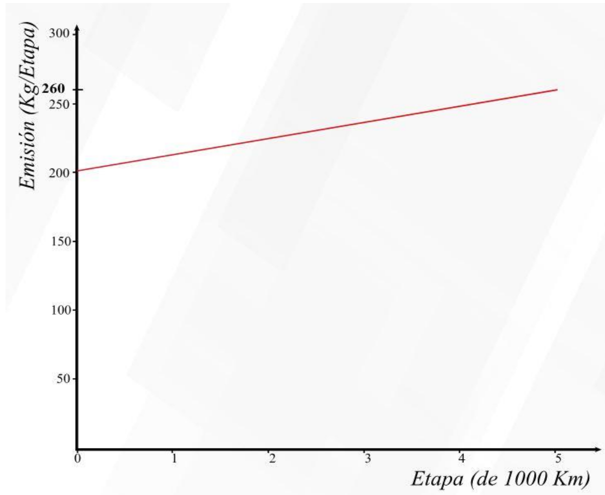
Si el docente responsable del curso requiere mayor detalle, se pueden consultar las propuestas compartidas por Dorado y Díaz (2019), donde se incluyen otras especies de seres vivos y sugerencias específicas para el desarrollo de la investigación.

En cuanto a las actividades para favorecer la comprensión de los componentes teóricos de la integral definida, se recomienda considerar actividades sobre fenómenos de acumulación como el estudio de gases invernadero propuesto por Grijalva *et al.* (2015). En la actividad se parte de una contextualización sobre el calentamiento global y el funcionamiento de convertidores catalíticos en los automóviles, profundizando en el rendimiento e invitando a la estimación de la cantidad de contaminantes emitidos con planteamientos como el siguiente:

Para analizar con más detalle la situación descrita, se puede decir que los convertidores catalíticos bajan su rendimiento de forma continua y que por esa razón los automóviles emiten cada vez más contaminantes. En la tabla siguiente se proporcionan los datos de emisión de gases de invernadero de un automóvil, en el cual se realizaron 6 mediciones, al inicio de cada etapa de 1000 km de recorrido del automóvil.

Etapa de recorrido (una etapa es de $1000\ km$)	0	1	2	3	4	5
Razón de escape de contaminantes ($km/Etapa$)	200	212	224	236	248	260

Veamos si es posible hacer un cálculo de la emisión total de contaminantes que el automóvil había efectuado durante el lapso de las 5 etapas consideradas. Para hacerlo, tomando en cuenta que el deterioro en el funcionamiento del convertidor catalítico es continuo, unimos en una gráfica los puntos señalados en la Tabla.



Para darnos una idea de cómo hacer el cálculo de la emisión total de gases emitidos por el automóvil, nos formulamos la interrogante de qué pasaría si el convertidor catalítico hubiera conseguido mantenerse funcionando igual que al principio, dejando pasar siempre 200 g/km o, lo que es lo mismo, 200 kg/Etapa.

Posteriormente se realizan interrogantes para determinar los contaminantes generados por exceso y defecto, a partir de la información brindada, por lo que genera una aproximación intuitiva al cálculo mediante sumas de Riemann.

De forma similar, también se sugiere complementar el estudio de la integral indefinida con teoremas de derivación y resolver problemas como el siguiente:

Problema: Dada la función $f(x) = 2x^2 + 5x + 6$ encontrar una función $F(x)$ tal que

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

El estudiante debe de reconocer que existen infinitas soluciones al problema anterior:

$$F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x + C$$

Donde C es una constante arbitraria. F(x) es la antiderivada general de f(x)

A partir de la actividad anterior cada estudiante reconoce que la antiderivación se considera como la operación para determinar el conjunto de todas las funciones que tienen una derivada dada.

Posteriormente, las y los estudiantes reconocen que la antiderivación se considera como la operación para determinar el conjunto de todas las funciones que tienen una derivada dada.

A partir de los teoremas de derivación resolver el siguiente

Problema: Dada la función $f(x) = 2x^2 + 5x + 6$ encontrar una función $F(x)$ tal que

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

El estudiante debe de reconocer que existen infinitas soluciones al problema anterior:

$$F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x + C$$

Donde C es una constante arbitraria. F(x) es la antiderivada general de f(x)

A partir del problema anterior, las y los estudiantes reconocen que la antiderivación se considera como la operación para determinar el conjunto de todas las funciones que tienen una derivada dada.

Considerando las actividades anteriores, construir un *Applet* de Geogebra en el que se utilice las funciones:

Integral(<Función>)

Integral(<Función>, <Variable>)

Se sugiere ver los siguientes videos, sin que éstos sean limitativos como recursos didácticos para el personal docente, quien puede sugerir algún otro que le permita desarrollar la actividad y el logro del propósito.

- Pepe Álvarez (6 dic. 2020). Integral indefinida 11 Primitiva de una función racional con Geogebra. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=MM_apjmmGS4
- Matematica UTN FRLP (27 jun. 2018). integral indefinida. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=sKI5mCPzTHA

Utilizando los comandos Integral (<Función>), Integral (<Función>, <Variable>) de Geogebra 5.0 verificar las propiedades de la integral indefinida.

1) La integral de una suma o diferencia de funciones es igual a la suma de integrales.

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)\, dx$$

2) La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

$$\int k * f(x)dx = k * \int f(x)dx$$

De los resultados obtenidos, aplicar los métodos de integración, integración de fracciones parciales y de funciones trigonométricas.

Se propondrán problemas y situaciones de diversas áreas. A continuación, se propone una de economía. Ejercicio elaborado por Edgardo Escorcia Caballero (2023) en *Problemas de aplicación de integral indefinida* https://es.scribd.com/document/499226088/Problemas-de-aplicacion-integral-indefinida

La gerencia de Lorimar Watch Company ha determinado que la función de ingreso marginal diario asociada con la producción y venta de sus relojes para viaje está dada por

$$R'(x) = -0.009x + 12$$

donde x denota el número de unidades producidas y vendidas y $R'(x)$ se mide en dólares por unidad.

a. Determine la función de ingreso $R(x)$ asociada con la producción y venta de estos relojes.
b. ¿Cuál es la ecuación para la demanda que relaciona el precio unitario de la venta total con la cantidad demandada de relojes para viaje?

Solución.

Derivada

Antiderivada general

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

a. Para determinar la función de ingreso, es necesario integrar la función de ingreso marginal, esto es:

$$\boxed{\begin{aligned}-0.009 &= -0.009 \times \frac{1000}{1000}\\ -0.009 &= -\frac{9}{1000}\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
R(x) &= \int R'(x)\,dx\\
R(x) &= \int (-0.009x+12)\,dx\\
R(x) &= \int -0.009x\,dx + \int 12\,dx\\
R(x) &= -0.009\int x\,dx + \int 12\,dx\\
R(x) &= -\frac{9}{1000}\left(\frac{x^2}{2}\right) + 12x + C\\
R(x) &= -\frac{9}{2000}x^2 + 12x + C \quad (1)
\end{aligned}$$

donde C es una constante de integración que debemos determinar. Para ello utilizamos la siguiente condición: si $x = 0$ entonces $R(0) = 0$.
Sustituimos la condición en (1)

$$\begin{aligned}
R(0) &= -\frac{9}{2000}(0)^2 + 12(0) + C\\
0 &= 0 + 0 + C\\
C &= 0
\end{aligned}$$

que es la respuesta al inciso a

$$R(x) = -\frac{9}{2000}x^2 + 12x$$

La respuesta al inciso b es la siguiente

b. La función de ingreso se puede escribir como $R(x) = px$, donde p representa el precio y x el número de unidades vendidas.

$$\begin{gathered}
R(x) = px\\
-\frac{9}{2000}x^2 + 12x = px\\
\frac{-\frac{9}{2000}x^2 + 12x}{x} = p\\
p = -\frac{9}{2000x}x^2 + \frac{12x}{x}
\end{gathered}$$

$$p = -\frac{9}{2000}x + 12 \qquad \textit{Ecuación de demanda}$$

Se sugiere que el estudiantado elabore una infografía con las características de la integral indefinida, con sus diversos casos y aplicaciones.

Es muy probable que el estudiantado tenga prácticas profesionales en la educación media superior, por lo que deberá elaborar propuestas de proyectos multidisciplinarios donde aplique la integral para modelar, resolver problemas, y comunicar resultados. Además de que los productos de las actividades realizadas en esta unidad se compilen grupalmente en un blog, considerando una reflexión matemática y didáctica sobre el aprendizaje y la enseñanza que podrían incluir: Línea del tiempo, cuadro comparativo, estudio de casos, compilación de situaciones cotidianas, proyectos breves.

Evaluación de la unidad

Congruente con el enfoque de esta licenciatura, se propone al formador una evidencia integradora de la unidad con criterios de evaluación que le servirán para elaborar sus rúbricas o sus listas de cotejo.

Es importante que los alumnos conozcan anticipadamente el proceso de evaluación, pues se espera que en este semestre tengan mayor autonomía en la generación de las evidencias, e incluso en la elaboración de sus propios criterios con los que evaluarán los productos generados, tanto de manera individual como colectiva.

Evidencia de aprendizaje de la unidad	Criterios de evaluación de la evidencia de aprendizaje de la unidad
Applet, para modelar las situaciones de la comunidad recopiladas paulatinamente a lo largo de la unidad en un **blog grupal**, previamente y durante las jornadas de acercamiento a la práctica, y que pueden ser modeladas con integrales indefinidas.	**Saber conocer** • Interpreta la integral como antiderivada. • Describe los métodos de integración e identifica cuál es más adecuado según la función. **Saber hacer** • Identifica los soportes digitales para resolver problemas de integración, organizar, y comunicar información matemática. • Enumera las características de los métodos por proyectos.

	• Resuelve problemas que implican realizar integrales. • Modela situaciones utilizando las integrales indefinidas. • Resuelve problemas inter, trans y multidisciplinarios, utilizando la integral como herramienta, como forma de modelación, y de explicación inter y transdisciplinaria. • Comunica claramente sus ideas, argumentos y conclusiones al resolver problemas. • Diseña y emplea recursos didácticos para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje. • Usa la innovación y los recursos tecnológicos para favorecer su proceso de aprendizaje. • Busca información en fuentes confiables. Saber ser y estar • Reconoce el valor de los problemas que ha enfrentado la humanidad y las soluciones que ha desarrollado, utilizando la herramienta matemática. • Respeta opiniones para favorecer el intercambio de ideas. • Participa de forma proactiva en la construcción de ambientes resilientes, en particular en poblaciones vulnerables. • Demuestra de manera crítica sus conjeturas en relación con las necesidades de la comunidad.

	• Utiliza el pensamiento científico, crítico y reflexivo, y apoya a sus estudiantes a que lo desarrollen. **Vinculación con la comunidad** • El estudiantado recupera problemas de la población, del entorno escolar y la comunidad susceptibles de ser resueltos con herramienta de integrales indefinidas.

Bibliografía

A continuación, se presenta un conjunto de textos de los cuales el profesorado podrá elegir aquellos que sean de mayor utilidad, o bien, a los cuales tenga acceso, pudiendo sustituirlos por textos más actuales.

Bibliografía básica

Ayres, F. y Mendelson, E. (1991). *Cálculo Diferencial e Integral. 3ra edición*. Editorial Mc. Graw Hill.

Cordero, F. (2001). *La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. International Thomson Editores, Vol. 4, Número 2, 103-128, México.

Crusse, A. B. y Lehman, M. (1982). *Lecciones de Cálculo 2. Introducción a la integral.* Fondo Educativo Interamericano.

Demana, F. D.; Waits, B. K.; Foley, G. D.; Kennedy, D. Y Blitzer, R. (2009). *Matemáticas Universitarias introductorias.* Pearson.

Díaz, J. L. (2021). La modelación en las ciencias naturales: una estrategia didáctica en un curso de cálculo. El cálculo y su enseñanza, 16(1), 35–44. https://doi.org/10.61174/recacym.v16i1.71

Díaz, J.L. (2023). Proyectos de Cálculo integral. Universidad de Sonora tomado de https://www.mat.uson.mx/~jldiaz/Proyectos_C_Integral-2023-I.html, (p. 1)

Dorado, I., & Díaz, J. L. (2019). La investigación como actividad complementaria en un curso de cálculo en la licenciatura en biología de la Universidad de Sonora. El cálculo y su enseñanza, 13(1), 13–18. https://doi.org/10.61174/recacym.v13i1.42

Escorcia Caballero, E. (2023). *Problemas de aplicación de integral indefinida.* Universidad de Sonora https://es.scribd.com/document/499226088/Problemas-de-aplicacion-integral-indefinida

Grijalva A., Bravo J., Ávila R. & Ibarra S. (2015). Cálculo diferencial e integral 2. Primera edición. Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. Sonora, México

Hughes-Hallet, D. (2000). *Cálculo*. CECSA.

Santaló, M. y Carbonell, V. (2001). *Cálculo Diferencial e Integral*. Editorial Éxodo.

Swokowski, E W. (2009). *Cálculo con geometría Analítica, 2da Edición.* Editorial Iberoamericana.

Waner, S. y Costenoble, S. R. (2002). *Cálculo Aplicado.* Thompson Learning.

Zill, D. (1987). *Cálculo con geometría Analítica.* Editorial Iberoamericana.

Bibliografía complementaria

Finney, T. (1998). *Cálculo con geometría Analítica. 6ta. edición.* Editorial Addison

Granville, W. A. (1984). *Cálculo Diferencial e Integral. Séptima reimpresión.* Limusa

Leithold, L. (1998). *El Cálculo con geometría Analítica. 5ta Edición*. Editorial Harla.

Purcell, J. E. (2007). *Cálculo con geometría Analítica. Cuarta edición.* Prentice Hall.

Recursos

Pepe Álvarez (6 dic. 2020). *Integral indefinida 11 Primitiva de una función racional con Geogebra* [Archivo de video]. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=MM_apjmmGS4

Matematica UTN FRLP (27 jun. 2018). *Integral indefinida* [Archivo de video]. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=sKI5mCPzTHA

Unidad de aprendizaje II. Integral definida

No hay que olvidar que las actividades desarrolladas en este curso tienen que abonar a la construcción de un ejercicio de intervención pedagógica, como parte del proyecto integrador sugerido para el quinto semestre. Con las actividades de esta segunda unidad, se espera recuperar la comprensión para modelar diversos fenómenos naturales, sociales, y sobre todo actuales, de tal manera que la interpretación del área bajo la curva de una función pueda abonar a la mejora de la comunidad, tanto en el desarrollo del pensamiento crítico y creativo, como en el abordaje y solución de problemas específicos.

También es importante mirar hacia los procesos y los saberes que la misma comunidad ha generado en el pasado, de tal suerte que se propone recuperar problemas que aún hoy en día se siguen discutiendo como los problemas generados en las instalaciones eléctricas, los problemas de optimización en las actividades económicas, e incluso problemas matemáticos de la antigüedad como el de la exhaución.

Propósito de la unidad de aprendizaje

Que el estudiantado normalista diseñe y resuelva situaciones comunitarias y de las ciencias mediante el modelado de integrales definidas y estimaciones geométricas. Con la finalidad favorecer el desarrollo de proyectos educativos que recurren a herramientas del cálculo integral en contextos reales y tecnológicos.

Contenidos

Para la segunda unidad se sugiere abordar los siguientes contenidos:

- La diferencial y el área bajo la curva. Interpretación geométrica.
- Interpretación geométrica de la integral. Suma de Riemann.
- Propiedades de la integral definida.
- Teorema del valor medio para integrales.
- Teorema fundamental del cálculo integral.

Estrategias y recursos para el aprendizaje

A continuación, se presentan algunas sugerencias de actividades para desarrollar los rasgos y dominios del perfil de egreso, no obstante, cada docente está en la libertad de modificar, sustituir o adaptarlas al contexto y necesidades de su grupo.

Se propone que el estudiantado realice algunas actividades propuestas de manera asincrónica, sobre todo las de búsqueda y sistematización de información, y que utilice los momentos de comunicación sincrónica, o los foros virtuales, para socializar los resultados.

Es importante que se recupere la interpretación del área bajo la curva en distintas ciencias, con el fin de poder establecer proyectos y situaciones interdisciplinarios.

Estudiar las unidades sobre el integrando y la variable de integración nos ayuda a comprender el significado de una integral definida. Por ejemplo, si $v(t)$ es la velocidad de un objeto que se mueve a lo largo de un eje, medida en pies por segundo,y t mide el tiempo en segundos, entonces tanto la integral definida como su aproximación de suma Riemann,

$$\int_a^b v(t)\,dt \approx \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t,$$

tener unidades dadas por el producto de las unidades de $v(t)$ y t:

$$(\text{feet/sec}) \cdot (\text{sec}) = \text{feet}.$$

Así, $\int_a^b v(t)\,dt$ mide el cambio total de posición del objeto en movimiento en pies.

Ejercicio tomado de:
https://espanol.libretexts.org/Matematicas/Libro%3A_Calculo_activo_(Boelkins_et_al.)/06%3A_Uso_de_Integrales_Definitas/6.03%3A_Densidad%2C_Masa_y_Centro_de_Masa

Con aproximaciones como la anterior, el estudiantado abordará la interpretación geométrica de la integral y aproximación al incremento de una función al calcular áreas y volúmenes en contextos relacionados con densidad, tanto densidad como propiedad de la materia, como con otras nociones de densidad como la siguiente:

1. Supongamos que la función$c(x) = 200 + 100e^{-0.1x}$ modela la densidad del tráfico en una carretera recta, medida en autos por milla, donde$x$ está el número de millas al este de un intercambio importante, y considera la integral definida$\int_0^2 (200 + 100e^{-0.1x})\,dx$.
   1. Cuáles son las unidades en el producto$c(x) \cdot \Delta x$?
   2. ¿Cuáles son las unidades sobre la integral definida y su aproximación de suma Riemann dada por
   $$\int_0^2 c(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} c(x_i)\Delta x?$$
   3. Evalúa la integral definida$\int_0^2 c(x)\,dx = \int_0^2 \left(200 + 100e^{-0.1x}\right)\,dx$ y escribe una frase para explicar el significado del valor que encuentres.

Ejercicio tomado de:
https://espanol.libretexts.org/Matematicas/Libro%3A_Calculo_activo_(Boelkins_et_al.)/06%3A_Uso_de_Integrales_Definitas/6.03%3A_Densidad%2C_Masa_y_Centro_de_Masa

Por el conocimiento técnico requerido, se recomienda que, para el diseño y desarrollo de las actividades sugeridas en la unidad, el estudiantado se vincule con formadores y estudiantes de otras áreas distintas a las matemáticas, y con otros sectores de la sociedad relacionados con la física. Con ellos calcular el área bajo la curva de una función cuadrática en el contexto de la velocidad de un móvil: qué contextos y qué variables son las que se involucran.

Se propone buscar en qué otros contextos de la física y la química se utilizan los modelos de integración.

Estimar el área bajo la curva de una función exponencial por extremos superiores e inferiores en situaciones y contextos como la demografía.

Analiza el método de exhaución propuesto por Arquímedes para determinar el área de una región semicircular y el área de un segmento de la parábola. (Ver Apostol, T. M., & Cantarell, F. V. (1999). *Calculus: volumen 1. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. Reverté, Páginas 3 – 10).

A partir del análisis anterior se define área de una región plana como:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Algunos estudiantes vieron los temas que se abordan en esta unidad en el bachillerato. Para sistematizar los algoritmos, fomentar en el estudiantado el trabajo autónomo Un buen apoyo es la plataforma Khan Academy. El profesorado organiza, junto con el estudiantado, la información en organizadores gráficos, infografías o fichas de trabajo, para el aprendizaje de conceptos y procedimientos, para facilitar su consulta.

Considerando la definición anterior, construir un Applet en GeoGebra en el que se utilicen las funciones:

- SumaSuperior(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>, <Número de Rectángulos>)
- SumaInferior(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>, <Número de Rectángulos>)

Se sugiere ver los siguientes videos, sin que ello represente una limitante para que el docente proponga recursos distintos para el logro del propósito:

- Ruben A. (10 oct. 2014). área bajo la curva con GeoGebra. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=y4NR40--lxM

- Ing. Alonso Martínez MATH (30 sep. 2020) 5. Uso de GeoGebra para aproximar el área de una función de segundo grado. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=bP6oe0OJEDc

Verificar las propiedades de la integral definida utilizando los comandos de GeoGebra 6.0

Integral(<Función>)

Integral(<Función>, <Variable>)

Integral(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>, <Evaluar o no ((true)/(false))>)

1) El valor de la integral definida cambia de signo si se permutan los límites de integración.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

2) Si los límites de integración coinciden, la integral definida vale cero.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

3) Si c es un punto interior del intervalo [a, b], la integral definida se descompone como una suma de dos integrales extendidas a los intervalos [a, c] y [c, b].

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4) La integral definida de una suma de funciones es igual a la suma de integrales.

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

5) La integral definida del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

$$\int_{a}^{b} k * f(x)\, dx = k * \int_{b}^{a} f(x)\, dx$$

A partir de la definición de integral definida, interpretar el Teorema del Valor Medio para integrales como la propiedad que establece que siempre se tiene un rectángulo con la misma área debajo de la curva, además la parte superior del rectángulo intersecta la función.

Se sugiere revisar los siguientes videos

- Las mates de Mila (4 jun. 2020). TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=mdjbpfjFGpg
- Laura G (28 jul. 2020). Teorema del valor medio para integrales. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=Tb8ZTuTVFvg

Analizar las implicaciones que tiene el teorema fundamental del cálculo.

- El teorema fundamental del cálculo consiste en la afirmación de que la derivación e integración de una función son operaciones inversas.
- El Teorema Fundamental del Cálculo proporciona un método abreviado para calcular integrales definidas, sin necesidad de tener que calcular los límites de las sumas de Riemann.

Resolver problemas relacionados con Presión y Fuerza de un Fluido.

Elaborar una reflexión o ensayo sobre la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Integral, a partir de la lectura del trabajo de Cordero (2001).

Evaluación de la unidad

Congruente con el enfoque de esta licenciatura, se propone al formador una evidencia integradora de la unidad con criterios de evaluación que le servirán para elaborar sus rúbricas o sus listas de cotejo.

Es importante que el estudiantado normalista conozca anticipadamente el proceso de evaluación, pues se espera que en este semestre tengan mayor autonomía en la generación de las evidencias, e incluso en la elaboración de sus propios criterios con los que evaluarán los productos generados, tanto de manera individual como colectiva.

<table>
<tr><th>Evidencia de aprendizaje de la unidad</th><th>Criterios de evaluación de la evidencia de aprendizaje de la unidad</th></tr>
<tr><td>Applet, para modelar las situaciones de la comunidad recopiladas paulatinamente a lo largo de la unidad en un blog grupal, previamente y durante las jornadas de acercamiento a la práctica, y que pueden ser modeladas con integrales definidas.</td><td>Saber conocer
• Interpreta la integral definida geométricamente como área bajo la curva de una función.
• Describe los métodos de integración e identifica cuál es más adecuado según la función.
Saber hacer
• Identifica los soportes digitales para resolver problemas de integración, organizar, y comunicar información matemática.
• Enumera las características de los métodos por proyectos.
• Resuelve problemas que implican realizar integrales.
• Modela situaciones utilizando las integrales definidas.
• Resuelve problemas inter, trans y multidisciplinarios, utilizando la integral como herramienta, como forma de modelación, y de explicación inter y transdisciplinaria.
• Comunica claramente sus ideas, argumentos y conclusiones al resolver problemas.
• Diseña y emplea recursos didácticos para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje.
• Usa la innovación y los recursos tecnológicos para favorecer su proceso de aprendizaje.
• Busca información en fuentes confiables.</td></tr>
</table>

	Saber ser y estar • Reconoce el valor de los problemas que ha enfrentado la humanidad y las soluciones que ha desarrollado utilizando la herramienta matemática. • Respeta opiniones para favorecer el intercambio de ideas. • Participa de forma proactiva en la construcción de ambientes resilientes, en particular en poblaciones vulnerables. • Demuestra de manera crítica sus conjeturas en relación con las necesidades de la comunidad. • Utiliza el pensamiento científico, crítico y reflexivo, y apoya a sus estudiantes a que lo desarrollen. **Vinculación con la comunidad** • El estudiantado recupera problemas de la población, del entorno escolar y la comunidad susceptibles de ser resueltos con herramienta de integrales definidas.

Bibliografía

A continuación, se presenta un conjunto de textos de los cuales el profesorado podrá elegir aquellos que sean de mayor utilidad, o bien, a los cuales tenga acceso, pudiendo sustituirlos por textos más actuales.

Bibliografía básica

Apostol, T. M., & Cantarell, F. V. (1999). *Calculus: volumen 1. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal.* Reverté.

Ayres, F. (1991). *Cálculo Diferencial e Integral*. 3ra edición. Editorial Mc. Graw Hill.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. International Thomson Editores, Vol. 4, Número 2, 103-128, México.

Crusse, A. B. y Lehman, M. (1982). *Lecciones de Cálculo 2. Introducción a la integral*. Fondo Educativo Interamericano.

Demana, F. D.; Waits, B. K.; Foley, G. D.; Kennedy, D. Y Blitzer, R. (2009). *Matemáticas Universitarias introductorias.* Pearson.

Hughes-Hallet, D. (2000). *Cálculo*. CECSA.

Leithold, L. (1998). El *Cálculo con geometría Analítica*. 5ta Edición Editorial Harla.

Santaló, M. y Carbonell, V. (2001). *Cálculo Diferencial e Integral*. Editorial Éxodo.

Suvorov, I. (1972). *Cálculo diferencial e integral con geometría analítica del plano*. SEP.

Swokowski, E W. (2009). *Cálculo con geometría Analítica*, 2da Edición. Editorial Iberoamericana.

Waner, S. y Costenoble, S. R. (2002). *Cálculo Aplicado.* Thompson Learning.

Zill, D. (1987). *Cálculo con geometría Analítica*. Editorial Iberoamericana.

Bibliografía complementaria

Finney, T. (1998). *Cálculo con geometría Analítica.* 6ta. Sexta edición. Editorial Addison.

Granville, W. A. (1998). *Cálculo Diferencial e Integral.* Séptima reimpresión. México: Limusa.

Purcell, J. E. (2007). *Cálculo con geometría Analítica.* Cuarta edición. México. Prentice Hall.

Sitios web

www.revista-educacion-matematica.org.mx

https://www.wolframalpha.com/

https://phet.colorado.edu/es/

Videos

Ing. Alonso Martínez MATH (30 sep. 2020) 5. *Uso de GeoGebra para aproximar el área de una función de segundo grado* [Archivo de video]. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=bP6oe0OJEDc

Ruben A. (10 oct. 2014). *Área bajo la curva con geogebra* [Archivo del video]. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=y4NR40--lxM

Las mates de Mila (4 jun. 2020). *TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL* [Archivo de video]. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=mdjbpfjFGpg

Laura G (28 jul. 2020). Teorema del valor medio para integrales [Archivo de video]. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=Tb8ZTuTVFvg

Evidencia integradora del curso

Evidencia integradora del curso	Criterios de evaluación de la evidencia integradora
Blog con propuestas de situaciones problema y proyectos con metodologías ABP y STEM, cuya modelación y solución requiera del Cálculo integral. El blog está acompañado de un documento escrito con el análisis y reflexión de los productos de las actividades realizadas en este curso, argumentando su innovación a partir de su impacto matemático y didáctico en la toma de decisiones didácticas, y su organización.	Saber conocer • Interpreta la integral indefinida y la definida de acuerdo con los contextos donde se presenta. • Describe los métodos de integración e identifica cuál es más adecuado según la función. Saber hacer • Reconoce los elementos constitutivos de un proyecto, acorde con metodologías específicas. • Conoce diversos formatos académicos tecnológicos para la socialización de la experiencia. • Utiliza software y App matemático, de diseño y de construcción colectiva. • Modela diversas situaciones cotidianas y las expresa mediante integrales. • Recurre a diversos soportes para socialización de resultados. • Organiza los saberes obtenidos en su experiencia de investigación - acción y de docencia reflexiva para dar cuenta de ciclos de reflexión para la mejora de su docencia. Saber ser y estar • Finca su proyecto de vida profesional en la interacción con formadores de áreas distintas a las matemáticas y con sus colegas para la mejora permanente. • Mantiene una posición crítica frente a su trabajo, y mantiene un espíritu de formación y mejora permanente.

	• Reconoce el valor de las producciones, y es capaz de retroalimentar a sus compañeros a partir de la presentación de sus trabajos. Vinculación con la comunidad • Valora los aportes de todos los actores educativos en el diseño de propuestas interdisciplinarias.

Perfil docente sugerido

Perfil académico

- Matemáticas
- Educación con Especialidad en Matemáticas
- Física
- Ingeniería
- Otras afines

Nivel académico

Obligatorio nivel de licenciatura, preferentemente maestría o doctorado en el área de conocimiento de matemáticas, física, o ciencias exactas.

Deseable: Experiencia de investigación en el área

Experiencia docente para:

- Conducir grupos.
- Planear y evaluar para la diversidad.
- Utilizar las TICCAD en los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- Retroalimentar oportunamente el aprendizaje de los estudiantes.
- Experiencia profesional. Referida a la experiencia laboral en la profesión sea en el sector público, privado o de la sociedad civil.

Referencias de este programa

Abreu, J. L.; Canavati, J. A.; Ize, J. y Minzoni, M. (1988). *Cálculo Diferencial e integral 1. Introducción a los conceptos del Cálculo*. Limusa.

Bravo, J. L. y Rodríguez, L. (2020). Formación del concepto de integral doble mediante la modelación matemática en la carrera de Ingeniería Informática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 33*(1), 400- 408. P. Balda, Mónica Marcela P. y Horacio Saúl S. (Editores). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Recuperada de: ttps://www.clame.org.mx/actas.html

Grijalva, A. y Dávila, M. T. (2020). Integral y visualización. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 21*, 220-230. P. Balda, Mónica Marcela P. y Horacio Saúl S. (Editores). México, D. F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Recuperada de: ttps://www.clame.org.mx/actas.html

Milevicich, L. (2008). Las ideas previas sobre el cálculo integral en los alumnos de primer año de la universidad. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 33*(1), 329-338. P. Lestón (Editora). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Recuperada de: https://www.clame.org.mx/actas.html

Rivera, A. (2014). *Cálculo Integral. Sucesiones y Series de funciones*. Editorial Patria.