



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas

Plan de Estudios 2022

Estrategia Nacional de Mejora
de las Escuelas Normales

Programa del curso

Álgebra y funciones

Segundo semestre

Primera edición: 2022

Esta edición estuvo a cargo de la Dirección General
de Educación Superior para el Magisterio
Av. Universidad 1200. Quinto piso, Col. Xoco,
C.P. 03330, Ciudad de México

D.R. Secretaría de Educación Pública, 2022

Argentina 28, Col. Centro, C. P. 06020, Ciudad de México

Trayecto formativo: **Formación pedagógica, didáctica e interdisciplinar**

Carácter del curso: **Currículo Nacional** Horas: **4** Créditos: **4.5**

Índice

Propósito y descripción general del curso	5
Dominios y desempeños del perfil de egreso a los que contribuye el curso	13
Estructura del curso	17
Orientaciones para el aprendizaje y enseñanza	18
Sugerencias de evaluación	26
Unidad de aprendizaje I. Expresiones algebraicas y sus operaciones	31
Unidad de aprendizaje II. Ecuaciones y desigualdades	39
Unidad de aprendizaje III. Funciones y variación	48
Evidencia integradora del curso	55
Perfil académico sugerido	57
Referencias de este programa	58

Propósito y descripción general del curso

El estudio del álgebra es relevante en la formación inicial de los futuros docentes, ya que se utiliza como una herramienta para plantear y resolver problemas intramatemáticos y extramatemáticos, además de interpretar y modelar distintos fenómenos e inclusive la toma de decisiones en ciertos casos. Aprender sobre esta área de las matemáticas favorece el desarrollo del pensamiento lógico-abstracto, ya que se trata de un conjunto estructurado de parámetros, variables, incógnitas, ecuaciones, inecuaciones y funciones con sus propiedades y representaciones.

Este curso teórico-práctico de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se ubica en la Fase 2, de la malla curricular del Plan de estudio 2022 y pertenece al Trayecto: Formación pedagógica, didáctica e interdisciplinar. Se articula con los cursos: *Sentido numérico y teoría de la aritmética, Trigonometría, Geometría analítica, Cálculo diferencial, Cálculo integral, Metodologías activas para la interdisciplinariedad, Didáctica de las matemáticas en educación básica, Análisis y desarrollo curricular, Soportes tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas*, y es de suma importancia para el Trayecto de práctica profesional y saber docente.

En este curso se abordan las expresiones algebraicas y sus operaciones; ecuaciones y desigualdades, así como las funciones y variación. Permitirá al docente en formación un estudio más profundo del álgebra como un sistema matemático de signos, para sentar las bases de cursos posteriores de matemáticas.

Con base en teorías pedagógicas y enfoques metodológicos adecuados, en semestres posteriores, el estudiantado podrá diseñar situaciones didácticas que favorezcan ambientes colaborativos para el aprendizaje y la toma de decisiones, considerando el uso de varios recursos didácticos y distintas herramientas tecnológicas tales como: hojas de cálculo, graficadores dinámicos, etc., para apoyar las tareas de exploración numérica, construcción y operación de expresiones algebraicas, además de analizar el comportamiento de funciones mediante tabulación y graficación.

El formador de docentes generará un espacio de reflexión en cuanto al uso didáctico de los errores que se ponen de manifiesto por las dificultades en la resolución y comprobación de los resultados.

Propósito general

Se espera que el estudiantado normalista construya conocimientos algebraicos como un conjunto estructurado de variables, parámetros, incógnitas, ecuaciones, inecuaciones y funciones con propiedades y representaciones mediante diversos recursos didácticos incluyendo el uso de la tecnología de tal forma que sean capaces de plantear y resolver problemas, interpretar y modelar fenómenos de distintas disciplinas, así como de actividades que se presenten en su comunidad.

Antecedentes

De manera general, el estudio del álgebra es relevante en la formación de los futuros docentes de matemáticas, ya que se utiliza como una herramienta para: representar e interpretar situaciones, propiedades, patrones y relaciones; plantear y resolver problemas intramatemáticos y extramatemáticos; y, modelar fenómenos asociados con distintas disciplinas, así como de los que se presentan en su comunidad.

Para Cedillo (1999), el álgebra puede concebirse como el estudio de reglas de manipulación simbólica complementado por el desarrollo de habilidades para usar eficientemente las representaciones algebraicas, la tabulación y graficación de funciones, la expresión y justificación de generalizaciones, y, el planteamiento y resolución de problemas.

Según MacGregor (2004), gran parte de la comunidad de investigadores en educación matemática considera que el álgebra es:

- una parte necesaria del conocimiento general de miembros de una sociedad democrática y educada,
- un prerrequisito para futuros estudios de matemáticas, ciertos cursos de educación superior y muchos campos de empleo,
- un componente crucial de la alfabetización matemática, que se basa en un futuro tecnológico y el progreso económico de la nación, y,
- un camino eficiente para resolver ciertos tipos de problemas,
- promueve la actividad intelectual de generalización, así como el pensamiento organizado y el razonamiento deductivo.

Socas (2011) analizó varias investigaciones que se han llevado a cabo en el mundo y afirmó que para lograr un mejor desarrollo del currículo de álgebra se deben considerar los siguientes aspectos: el lenguaje, las múltiples representaciones, la semiótica, los mediadores tecnológicos, la contextualización, las dificultades y los errores, la Preálgebra, el énfasis en nuevos contenidos (caos, grafos, etc.), la enculturación, los procesos de pensamiento algebraico, el empirismo, las actividades y los proyectos open-ended. Estas aportaciones las organizó en cinco perspectivas: (1.) la relación entre la aritmética y el álgebra, (2.) las dificultades y errores, (3.) las fuentes de significado, (4.) los mediadores tecnológicos, y, (5.) la organización de la enseñanza y la formación del profesorado.

El logro en el aprendizaje del álgebra, depende de la capacidad que tienen las personas que la aprenden, de lograr una transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico; según Socas, Palarea y Ruano, (2003), Molina (2009) y Papini (2003) esta transición sigue representando un problema crucial en las Matemáticas escolares, incluso llegan a afirmar que “la entrada en el mundo del Álgebra supone para los alumnos que vienen de prácticas aritméticas una ruptura cognitiva esencial” (Papini, 2003, p. 44). Una de las razones para que se propicie esta dificultad tiende a ser la visión que tenemos sobre los procesos educativos, aprender a través de memorización y repetición, concordando con Kieran (1992) quien establece que los estudiantes generalmente recurren a la memorización de reglas y procedimientos para satisfacer su falta de comprensión del álgebra, llegando a la noción de que ese proceso es la esencia de esta área.

Es necesario dar cuenta de algunos conflictos que ocasiona el aprendizaje del Álgebra, por un lado, en concordancia con Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2005), existen dificultades para diferenciar los distintos usos de la variable, interpretar la letra cuando aparece acompañada de un coeficiente o tiene un exponente, para aceptar expresiones abiertas como respuestas válidas (necesidad de clausura), tendencia a ignorar la letra que representa un parámetro o asignarle un valor y para reconocer la variación conjunta de dos variables relacionadas; y por otro, el dominio afectivo que existe hacia esta rama de las matemáticas, la gente piensa en la aritmética como algo fácil, pues trata solo con números, y el álgebra como difícil, porque integra letras como expresiones generalizadas (Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011).

La construcción de problemas que permitan la transición de la Aritmética al Álgebra muchas de las veces no cubren los requerimientos necesarios para lograrlo,

es muy importante conservar las habilidades aritméticas e ir construyendo poco a poco las habilidades algebraicas. Considerando las estadísticas de evaluación,

podemos asegurar que a muchos estudiantes de enseñanza media les sucede que al pasar del tiempo pierden sus habilidades aritméticas y no logran construir sólidamente las algebraicas, lo cual finalmente se traduce en un desempeño pobre en la resolución de problemas, tanto en el aspecto aritmético como en el algebraico. (Hitt, 2002)

En la creación de concepciones y criterios de que el Álgebra es meramente una generalización de los procesos aritméticos que se trabajaron anteriormente, lo que se espera es, por un lado, que los estudiantes construyan significados de manera formal en el tratamiento de problemas tratados intuitivamente y, por otro lado, la introducción de objetos matemáticos nuevos como ecuación, incógnita, literales, etc. Desde la perspectiva de Vergnaud (1987) para lograrlo es necesario una ruptura en la conceptualización en los procesos formales para transitar de un pensamiento aritmético a uno algebraico.

Es importante que para el estudio del álgebra y las funciones se consideren contextos comunitarios, en este sentido investigaciones como la de Carraher, Carraher y Schliemann (1991), en donde se analizan habilidades subyacentes en el uso de balanzas de dos platillos en la vida cotidiana para el aprendizaje de ecuaciones lineales son un buen referente. Otro estudio vinculado con dichos contextos comunitarios es el de Chan, Konrad, González, Peters y Ressa (2014), en el que se investigó cómo personas con síndrome de Down combinan finanzas con álgebra en un entorno del mundo real.

Debido a lo anterior, los profesores de matemáticas deben ser capaces de diseñar ese tipo de actividades algebraicas y proponerlas a estudiantes de educación secundaria o media superior con un enfoque metodológico y pedagógico pertinente.

Descripción

Este curso teórico-práctico *Álgebra y funciones*, se ubica en la Fase 1, segundo semestre de la malla curricular del Plan de estudio 2022 y pertenece al Trayecto: Formación pedagógica, didáctica e interdisciplinar. Para su estudio se contemplan las expresiones algebraicas y sus operaciones; ecuaciones y desigualdades, así como las funciones y variación, lo cual permitirá a las y los docentes en formación un estudio más profundo de un sistema matemático de signos algebraico (Fillooy, Rojano y Puig, 2008), para sentar las bases de cursos posteriores de las matemáticas.

Para el desarrollo del curso se sugiere favorecer ambientes colaborativos para el aprendizaje y la toma de decisiones, considerando el uso de varios recursos

didácticos y distintas herramientas tecnológicas, tales como: hojas de cálculo, graficadores dinámicos, etc., para apoyar las tareas de exploración numérica, construcción y operación de expresiones algebraicas, además de analizar el comportamiento de funciones mediante tabulación y graficación. Por lo anterior, se sugiere el trabajo colegiado con el docente titular del curso *Soportes tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas*, el cual le puede aportar elementos teóricos y metodológicos para el uso de recursos y plataformas que favorecen el aprendizaje de los contenidos disciplinares.

El estudio del álgebra y las funciones, como parte de la formación docente, contempla la resolución de problemas comunitarios y de las ciencias mediante el uso de modelos. En este sentido es importante que los estudiantes reconozcan que los contenidos del curso pueden identificarse en las actividades de la comunidad, lo cual los lleve a interpretar el aprendizaje en contexto y en situaciones asociadas a una educación que puede ser de tipo informal.

La formación docente requiere que en todo momento los estudiantes normalistas reflexionen sobre sus propios procesos de construcción del conocimiento algebraico, las dificultades que experimentan en su aprendizaje, las estrategias didácticas que utiliza el formador, el tipo de producciones que se generan. Para ello, podrán acordar actividades comunes con el curso *Análisis de práctica y contextos escolares*, así como con otros cursos del mismo semestre para analizar los procesos de aprendizaje del álgebra en las escuelas secundarias y de media superior, como parte de un diagnóstico pedagógico que se desarrolla como proyecto integrador, el cual se describe más adelante

Cursos con los que se relaciona

El enfoque propuesto para la malla curricular de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas favorece una vinculación entre *Álgebra y funciones* con cursos del mismo trayecto formativo Formación pedagógica, didáctica e interdisciplinar. Cabe destacar el vínculo estrecho con el curso de *Sentido numérico y teoría de la aritmética*, no sólo por el uso del conocimiento sobre números y sus operaciones, sino también por la transición de la aritmética al álgebra como un eslabón fundamental para construir ideas y conceptos matemáticos más complejos y abstractos. En aritmética las cantidades se expresan por medio de números, mientras que en álgebra se representan a través de letras. No obstante, Filloy y Rojano (1989) señalaron que las concepciones de los estudiantes con respecto a las operaciones que se llevan a cabo con números se deben modificar de tal manera que se pueda desarrollar la idea de operar con distintos objetos, o bien, concebirse como nuevos objetos.

Operar con diferentes tipos de números está presente en la generalización de sucesiones con progresión aritmética o geométrica; las operaciones con monomios y polinomios; la resolución de ecuaciones o sistemas de ecuaciones e inecuaciones; la comprobación de la solución; la evaluación y graficación de funciones; y, el desarrollo de modelos matemáticos asociados con fenómenos naturales, biológicos, físicos o químicos.

También se relaciona con el curso de *Trigonometría* porque permite el planteamiento del modelo matemático, a partir de la identificación de las variables y el proceso para encontrar los valores de dichas variables. *Geometría analítica* es un antecedente a las representaciones analíticas de las funciones algebraicas y lugares geométricos, en *Cálculo diferencial e integral* la manipulación algebraica permite simplificar y obtener de manera concisa puntos particulares de ciertas funciones, así como simplificar ciertas integrales.

Así pues, el presente curso contribuye al desarrollo de saberes y razonamientos algebraicos que permiten resolver problemas de otras áreas de las matemáticas, por lo que el abordaje de dichos contenidos son el punto de partida para posteriores cursos en el mismo ámbito disciplinar. Finalmente, favorece la formación inicial de los alumnos normalistas mediante el uso de las tecnologías educativas que permiten desarrollar habilidades docentes en los estudiantes normalistas, a través de actividades de relaciones, representaciones y modelación para la solución de problemas del contexto.

También se relaciona con el curso *Metodologías activas para la interdisciplinariedad*, mediante algunas actividades del trabajo multidisciplinar que requieren de la consolidación del lenguaje algebraico; *Didáctica de las matemáticas en educación básica* brinda elementos conceptuales para el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática del nivel medio superior y superior; *Análisis y desarrollo curricular* promueve la reflexión de los problemas que aquejan al Sistema Educativo Nacional y las políticas educativas. *Soportes tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas con el lenguaje y la formalización algebraica* facilitan la relación con la ciencia y la tecnología, y es de suma importancia para el Trayecto de Práctica Profesional con respecto al análisis de prácticas y contextos escolares.

Por otro lado, el curso de la *Teoría y modelos de aprendizaje* revisa las teorías y paradigmas del aprendizaje en el contexto educativo, lo cual, permitirá una sistematización y consolidación de los conocimientos adquiridos en la educación obligatoria y afirmar los conocimientos previos del álgebra.

Los cursos que conforman el Trayecto formativo Bases teóricas y metodológicas de la práctica inspiran al normalista a analizar teorías y prácticas pedagógicas esenciales para reflexionar sobre su propia práctica.

Por otro lado, es importante señalar que, de acuerdo con el Plan de estudios de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, en su apartado 1. 14 Evaluación y acreditación, se establece que “Al término de cada curso se incorporará una evidencia o proyecto integrador desarrollado por el estudiantado, de manera individual o en equipos como parte del aprendizaje colaborativo, que permita demostrar el saber ser y estar, el saber, y el saber hacer, en la resolución de situaciones de aprendizaje. Se sugiere que la evidencia final sea el proyecto integrador del semestre, que permita evidenciar la formación holística e integral del estudiantado y, al mismo tiempo, concrete la relación de los diversos cursos y trabajo colaborativo, en academia, de las maestras y maestros responsables de otros cursos que constituyen el semestre, a fin de evitar la acumulación de evidencias fragmentadas y dispersas.” (SEP, 2022)

Por lo anterior, es imprescindible que el profesorado que imparte el curso *Álgebra y funciones* establezca comunicación permanente mediante trabajo colegiado con sus pares del mismo semestre para acordar actividades comunes o identificar aspectos que este curso puede aportar a otros cursos, y a la construcción del documento que sistematiza los resultados del diagnóstico pedagógico como evidencia común del segundo semestre, resultado del proyecto integrador.

Responsables del codiseño del curso

Este curso fue elaborado por las y los docentes normalistas: Maricela Bonilla González de la Escuela Normal Superior de México; Rogelio González Hernández de la Escuela Normal Superior de Querétaro; Alejandra Fabiola Huitrado Mora del Centro de Actualización del Magisterio de Zacatecas; María Teresa Martínez Alcaraz del Instituto Superior de Educación Normal del Estado de Colima; Felipe Bermejo Herrera de la Escuela Normal Superior del Estado de Puebla; Emma Luz Velasco Zamora del Instituto Superior de Educación Normal del Estado de Colima; Francisco Juárez Lucas de la Escuela Normal Superior Oficial de Guanajuato; Priscilla Elizabeth Hernández García del Instituto Superior de Educación Normal del Estado de Colima; Carolina Rubí Real Ortega de la Escuela Normal Superior de México; Pablo Alberto Macías Martínez de la Escuela Normal Superior de Jalisco; Saúl Elizarrarás Baena de la Escuela Normal Superior de México; José Alonso del Río Ramírez del Centro de Actualización del Magisterio de Zacatecas; Lady Diana Hernández Hernández de la Escuela Normal

Veracruzana; Elisa Mateo Hernández de la Escuela Normal Superior Pública del estado de Hidalgo; Luciano Alcantar Heredia de la Escuela Normal de Sinaloa; Rocío Maldonado Barrios de la Benemérita Escuela Normal Urbana Federal Fronteriza; Alejandra Ávalos Rogel de la Escuela Normal Superior de México.

Así como especialistas en el diseño curricular: Julio César Leyva Ruiz, Gladys Añorve Añorve, Sandra Elizabeth Jaime Martínez, María del Pilar González Islas de la Dirección General de Educación Superior para el Magisterio.

Dominios y desempeños del perfil de egreso a los que contribuye el curso

En este apartado se especificarán los aspectos del perfil general y dominios y desempeños del perfil de egreso profesionales a los cuales contribuye este curso.

Perfil general

El egresado, egresada, de la Escuela Normal es un docente profesional de la educación que:

- Es capaz de contextualizar el proceso de aprendizaje e incorporar temas y contenidos locales, regionales, nacionales y globales significativos; planifica, desarrolla y evalúa su práctica docente al considerar las diferentes modalidades y formas de organización de las escuelas.
- Diseña y gestiona ambientes de aprendizaje presenciales, híbridos y a distancia, respondiendo creativamente a los escenarios cambiantes de la educación y el contexto.
- Cuenta con una formación pedagógica, didáctica y disciplinar sólida para realizar procesos de educación inclusiva de acuerdo al desarrollo cognitivo, psicológico, físico de las y los estudiantes, congruente con su entorno sociocultural.
- Es capaz de diseñar, realizar y evaluar intervenciones educativas situadas mediante el diseño de estrategias de enseñanza, aprendizaje, el acompañamiento, el uso de didácticas, materiales y recursos educativos adecuados, poniendo al estudiante en el centro del proceso educativo como protagonista de su aprendizaje.
- Produce saber y conocimiento pedagógico, didáctico y disciplinar, reconoce y valora la investigación educativa y la producción de conocimiento desde la experiencia; sabe problematizar, reflexionar y aprender de la práctica para transformarla.

Perfil profesional

Con el estudio del álgebra y funciones se contribuye al logro de los siguientes rasgos y dominios del perfil de egreso profesional.

Diseña procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, de acuerdo con la didáctica y sus enfoques vigentes, considerando los diagnósticos grupales y contextuales, los entornos presenciales o virtuales, así como situaciones que fortalecen las habilidades socioemocionales.

- Relaciona el conocimiento de las matemáticas con los propósitos, contenidos y enfoques de otras disciplinas, propiciando un conocimiento integral de la ciencia, relacionándolos con fenómenos de su vida cotidiana.
- Diseña estrategias didácticas que favorezcan el tránsito de un pensamiento aritmético a un pensamiento algebraico, de un pensamiento geométrico a un pensamiento variacional, con base en el reconocimiento y análisis de los obstáculos que surjan, a fin de superarlos proponiendo alternativas de solución.
- Utiliza el lenguaje matemático para la resolución de problemas situados o contextualizados.
- Expresa la relación entre dos variables utilizando distintos modelos de representación: tabular, gráfico y algebraico para resolver problemas situados o contextualizados.
- Identifica y analiza las dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas para diseñar estrategias didácticas alternativas que le permitan al estudiantado superarlos.
- Planea experiencias de aprendizaje, de acuerdo con los estilos y ritmos de aprendizaje, las necesidades, intereses y desarrollo cognitivo de estudiantes; en entornos multimodales, presenciales, a distancia, virtuales o híbridos.

Gestiona los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en un clima de igualdad, equidad e inclusivo que fortalece las habilidades socioemocionales, desde y para la democracia participativa.

- Desarrolla experiencias de aprendizaje mediando la semántica y la sintaxis matemática con la finalidad de dar sentido y significado a los conocimientos, axiomas, teoremas, reglas y principios.

Articula las distintas ramas de las Matemáticas con otras disciplinas, para facilitar el análisis de una situación modelada, desde el pensamiento complejo, que favorezca el desarrollo del pensamiento lógico-matemático del alumnado de la educación obligatoria.

- Analiza diferentes problemas, situaciones o fenómenos para proponer modelos matemáticos desde una visión integradora y transdisciplinaria como un medio para el diseño e implementación de secuencias didácticas que favorezcan su resolución.

- Facilita el análisis de modelos desde el pensamiento matemático al articular diferentes áreas de esta disciplina que favorece el desarrollo del método axiomático, a través del razonamiento hipotético-deductivo, inductivo y analógico.
- Relaciona sus conocimientos de las Matemáticas con los contenidos de otras disciplinas desde una visión integradora, multidisciplinaria, interdisciplinaria y transdisciplinaria para propiciar el aprendizaje de sus estudiantes.
- Facilita el análisis de situaciones modeladas desde el pensamiento complejo que favorece el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, geométrico y razonamiento, en el alumnado, al articular las distintas ramas de las Matemáticas.
- Expresa la relación entre una función y la variable de la que depende, utilizando lenguaje gráfico, algebraico y tecnológico, para hacer transposiciones didácticas que le permitan gestionar los aprendizajes del alumnado que atiende.
- Analiza una situación modelada mediante el reconocimiento de que una misma expresión matemática puede ser escrita de diferentes maneras, a fin de que pueda guiar al alumnado a experimentar y encontrar las suyas.
- Construye relaciones entre la Geometría y el Álgebra, el Álgebra y la Estadística, la Aritmética y la probabilidad, entre otras.
- Utiliza los lenguajes artísticos como medio para promover el aprendizaje de las matemáticas.

Establece relaciones funcionales algebraicas y trascendentes entre variables, para modelar y resolver problemas que impliquen máximos y mínimos.

- Recurre a la generalización y a la variación funcional para resolver problemas vinculando los procesos locales y globales.

Utiliza críticamente la innovación didáctica y tecnológica en la educación, como parte de su práctica docente, para favorecer el pensamiento lógico matemático, el desarrollo del pensamiento crítico reflexivo y la formación integral del alumnado, desde una visión crítica, humanista, solidaria y con sentido ético-político.

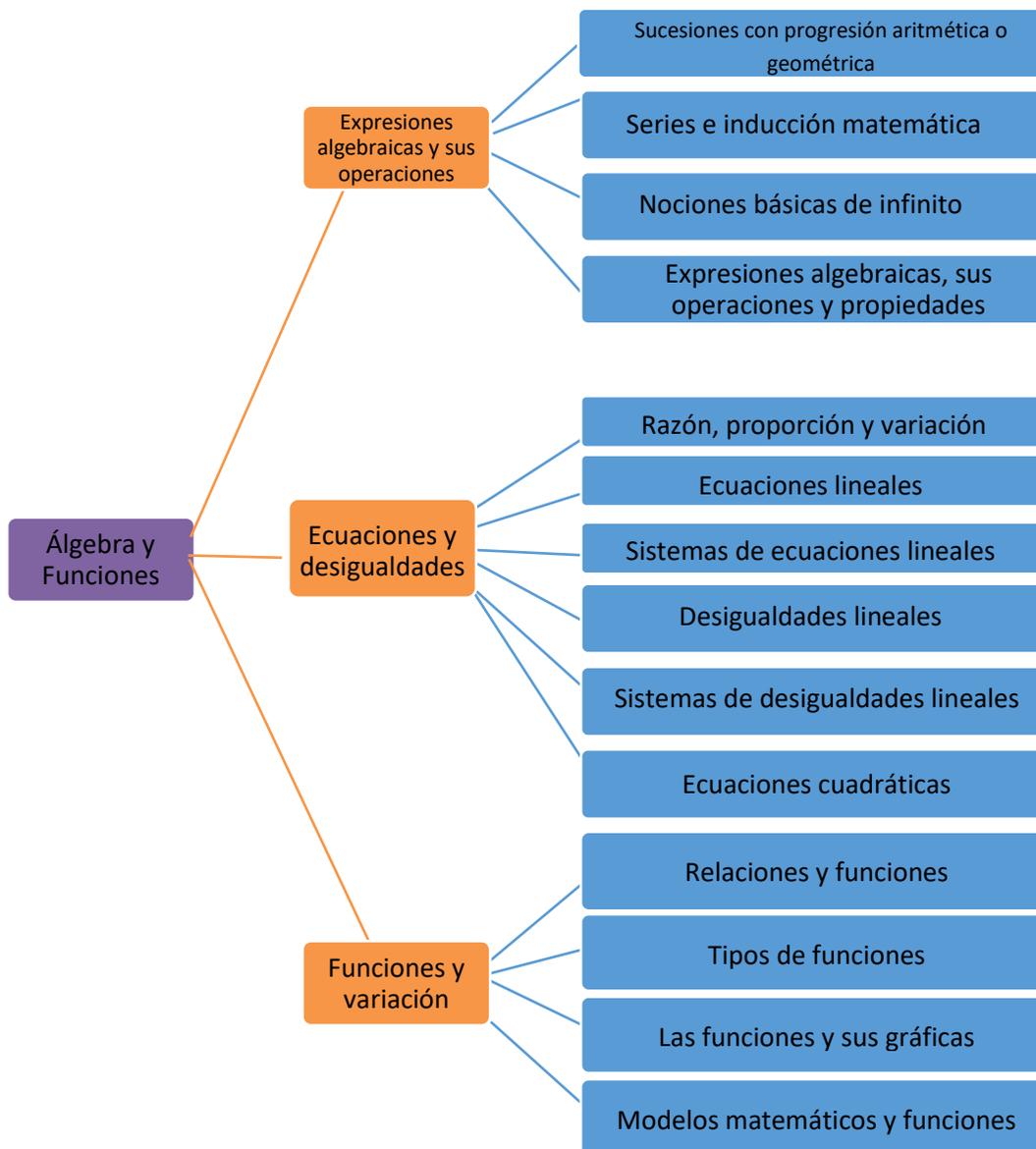
- Reconoce las culturas digitales, cuenta con habilidades y saberes en el uso y manejo pedagógico y crítico de las tecnologías actuales, que le permiten diseñar o seleccionar y emplear objetos de aprendizaje y

recursos didácticos contextualizados, como mediadores en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, geométrico, el razonamiento y la solución de problemas en un clima de aprendizaje colaborativo e incluyente en diferentes escenarios y contextos.

- Utiliza de manera ética y crítica las Tecnologías de la Información, Comunicación, Conocimiento y Aprendizaje Digital (TICCAD), como herramientas mediadoras para la construcción del aprendizaje matemático en diferentes plataformas y modalidades multimodales, presenciales, híbridas y virtuales o a distancia, para favorecer la significatividad de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Estructura del curso

En el siguiente esquema se incluye la estructura del curso, la cual contempla tres unidades de aprendizaje de las que se derivan contenidos específicos.



Orientaciones para el aprendizaje y enseñanza

El aprendizaje del álgebra en los diferentes niveles educativos se hace difícil a la mayoría de los estudiantes, con esta afirmación están de acuerdo diversos autores como, por ejemplo: Booth (1984), Socas (1997), Palarea (1999), Filloy y Rojano (1989), así como Herscovics y Linchevski (1994). Debido a lo anterior, es fundamental que en la formación de profesores se preste especial atención al estudio de esta área de las matemáticas, lo cual, para este curso implica comprender patrones, expresiones algebraicas y sus operaciones, resolver ecuaciones y desigualdades y explorar funciones.

En el aprendizaje del Álgebra no es un objetivo el estudio de su estructura y sus símbolos, es más bien una herramienta para la resolución de problemas, de tal manera que se pueda avanzar a nuevos conocimientos.

Para el estudio de este curso es importante recuperar los conocimientos previos con los que cuentan las y los estudiantes, ya que tanto en los niveles educativos anteriores como en los cursos *Sentido numérico y teoría de la aritmética*, así como *Geometría plana y del espacio* se adquirieron conocimientos vinculados con el álgebra.

El estudio del álgebra se puede llevar a cabo desde dos dimensiones: como instrumento y objeto (Papini, 2003). Si se trata como instrumento, se utiliza como una herramienta para resolver problemas intramatemáticos y extramatemáticos; en contraste, si se concibe como objeto, su enseñanza y aprendizaje versa sobre un conjunto estructurado que tiene propiedades y se trata de modo formal con distintas representaciones.

Kieran (2004) propuso tres tipos de actividades algebraicas: generacionales, transformacionales y de global/meta nivel. Las actividades generacionales involucran la formación de expresiones y ecuaciones como objetos del álgebra, mientras que las transformacionales implican factorizaciones, ampliaciones, sustituciones, adición y multiplicación de expresiones polinómicas, productos notables, solución de ecuaciones, simplificación de expresiones y trabajo con expresiones y ecuaciones equivalentes. Por último, las actividades de global/meta nivel son aquellas en las que se utiliza el álgebra como herramienta para resolver problemas, modelar, trabajar con estructuras notables, estudiar cambios, generalizar, relacionar de manera analítica, probar y predecir.

De esta manera, se plantea la propuesta de resolver problemas algebraicos que se relacionan con contextos geométricos, de tal manera que la enseñanza pueda advertir, recuperar y discutir los errores matemáticos que cometen los estudiantes con objeto de mejorar su comprensión mediante una perspectiva

ecológica que les permita afrontar el riesgo en un mundo lleno de incertidumbre (Elizarrarás, 2021).

Derivado de lo anterior, Socas (2011), destaca tres razones principales para destacar el especial interés que hoy tiene el desarrollo del *Pensamiento algebraico* en los alumnos de la educación obligatoria, y que los normalistas deben ser sensibles para identificar aquellos problemas asociados a su aprendizaje, a saber:

- 1) La continua y generalizada dificultad con que los estudiantes y profesores se enfrentan a la materia a pesar de tres décadas de reformas y desarrollos de planes de estudios. En este sentido, se considera necesario el desarrollo de marcos de trabajo que permitan hacer estudios rigurosos de los factores que subyacen en las dificultades de los estudiantes y profesores en la transición de la aritmética al álgebra, en el desarrollo del pensamiento algebraico y en la resolución de problemas algebraicos.
- 2) Caracterización del pensamiento algebraico e identificación de las razones esenciales de la actividad algebraica que deben constituir las metas que tenemos para el aprendizaje de los alumnos en este campo. Lo anterior permitirá señalar con claridad las metas para la educación de los alumnos en cada etapa educativa: *early algebra*, preálgebra, y álgebra.
- 3) Coordinación de los diversos hallazgos de la investigación en álgebra que existen en este campo, por lo que es necesario contar con una visión integrada de los hallazgos de la investigación en pensamiento algebraico, como medio para fomentar el desarrollo curricular y la evaluación en álgebra.

Otra recomendación didáctica, es resaltar la importancia de que los normalistas reconozcan que un problema algebraico se puede representar en diversos registros (verbal, aritmético, analítico) (Duval, 2006), y cómo el cambio de visión en el aprendizaje del álgebra propiciará que los docentes en formación cambien de visión acerca de la enseñanza y aprendizaje del Álgebra.

Küchemann (1981), Kieran (1992), Matz (1980), y Booth (1984), han señalado las dificultades y los errores que tienen los estudiantes de nivel secundaria en la interpretación de símbolos. En efecto, Kieran (1981) ha hecho referencia a la dificultad en la aceptación de la falta de clausura, es decir, la dificultad de considerar expresiones aritméticas o algebraicas, como entidades en sí y la necesidad de que el resultado numérico o valor de cada expresión aparezca expresado. Esta limitación va acompañada de una percepción de las expresiones como procesos o acciones y no como objetos matemáticos.

Herscovics (1989) afirma que, con frecuencia, se enseña a los alumnos la sintaxis del lenguaje sin la semántica, es decir, los alumnos aprenden las reglas de la gramática (reglas algebraicas) pero no entienden las palabras (símbolos). Los alumnos perciben, así, el álgebra como un sistema abstracto, sin conexión con la realidad y vacío de significado.

Filloy y Rojano (1989) y Herscovics y Linchevski (1994), señalan que la brecha cognitiva entre la aritmética y el álgebra puede ser caracterizada por la dificultad de los estudiantes para operar con incógnitas, estos autores señalan que la mayor parte de los errores vienen asociados a la resolución de ecuaciones con incógnitas en ambos miembros de la igualdad.

Es primordial que, para el estudio de los diferentes contenidos, las y los estudiantes complementen el trabajo en clase con trabajo autónomo extraclase, ya que las cuatro horas a la semana que se contemplan para el desarrollo del curso resultarán insuficientes.

En las actividades que se planteen se deben movilizar diferentes habilidades: perceptual, de comunicación (oral, escrita y gráfica), para la elaboración de conjeturas y la generalización. Dichas actividades deberán plantearse considerando el trabajo colaborativo.

Por otro lado, cuando los estudiantes ya han aprendido la sintaxis algebraica, la semántica de los símbolos y las convenciones de la notación, hay que centrar la atención en las dificultades del reconocimiento de las estructuras típicas de las expresiones algebraicas. Hoch (2003), utilizó el término sentido de la estructura para referirse a una colección de habilidades que permiten a un alumno hacer un mejor uso de las técnicas algebraicas aprendidas previamente. Posteriormente, Hoch y Dreyfus (2004, 2005), precisaron algunas de las habilidades que engloba el sentido estructural en el contexto del álgebra escolar: ver una expresión algebraica como una entidad, reconocer una expresión algebraica como una estructura conocida, dividir una entidad en subestructuras, apreciar las conexiones mutuas entre estructuras y reconocer qué transformaciones es posible realizar y cuáles de éstas son de utilidad. En un trabajo más reciente, estos autores (Hoch y Dreyfus, 2006), presentaron una caracterización operacional de sentido estructural, por medio de tres descriptores, los cuales ayudan a identificar el uso de sentido estructural en el contexto de una tarea algebraica.

Una recomendación para los formadores que atienden este curso es que aborden cómo se ha considerado el álgebra en sus distintas etapas: retórica (siglo III), el enunciado y la resolución de un determinado problema es totalmente verbal, los problemas eran muy particulares y no había métodos

generales de resolución, por lo tanto, no existían símbolos o signos especiales para representar las incógnitas; Sincopada (siglo III - siglo XVI), en la que se reconoce que existe la sustitución de conceptos y operaciones que se usaban más frecuentemente por abreviaturas, creando una especie de taquigrafía; y, simbólica (siglo XVI - época actual), en donde se representan operaciones y procesos escritos por medio de símbolos, para las constantes y las variables, lo que permitió la generalización.

Para la construcción del conocimiento algebraico, los medios tecnológicos son herramientas esenciales para la enseñanza y el aprendizaje, el diseño de un ambiente de aprendizaje basado en el uso de un software como GeoGebra, donde las y los estudiantes participen de manera activa puede captar su interés y estimular su creatividad de manera que se desarrollen las habilidades matemáticas. A través de herramientas tecnológicas los estudiantes tienen la oportunidad de explorar distintos acercamientos a la solución de un problema de tal manera que pueden afinar sus planteamientos y encontrar soluciones a las situaciones planteadas.

Finalmente, es importante que en el diseño de las actividades del curso el formador y los estudiantes normalistas tomen en cuenta el lenguaje inclusivo. Para ello, se recomienda revisar la Guía para el uso de un lenguaje incluyente y no sexista, de la Comisión Nacional de Derechos Humanos, 2017 México, en: <https://www.derechoshumanoscdmx.gob.mx/wp-content/uploads/GUIALINS2017.pdf>

Proyecto integrador

Es preciso recordar que el Plan de estudios de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas establece que “Al término de cada curso se incorporará una evidencia o proyecto integrador desarrollado por el estudiantado, de manera individual o en equipos como parte del aprendizaje colaborativo, que permita demostrar el saber ser y estar, el saber, y el saber hacer, en la resolución de situaciones de aprendizaje. Se sugiere que la evidencia final sea el proyecto integrador del semestre, que permita evidenciar la formación holística e integral del estudiantado y, al mismo tiempo, concrete la relación de los diversos cursos y trabajo colaborativo, en academia, de las maestras y maestros responsables de otros cursos que constituyen el semestre, a fin de evitar la acumulación de evidencias fragmentadas y dispersas.” (SEP, 2022)

Asimismo, es necesario reconocer que los cursos de segundo semestre de esta licenciatura tienen una naturaleza distinta, por lo que se propone trabajar de

manera vinculada a partir de—un diagnóstico pedagógico como proyecto integrador.

El diagnóstico pedagógico es una práctica que va a guiar la enseñanza previamente de todo profesional de la educación, en sus orígenes es la primera fase para un proceso de intervención educativa. Existen diversos tipos de diagnóstico, que están asociados a diversas cosmovisiones y perspectivas pedagógicas de lo que significa el proceso educativo (Avalos-Rogel, 2006). Dado el enfoque de esta licenciatura, y en general la filosofía que subyace en el Artículo tercero de la Constitución, esto es el humanismo, el diagnóstico da cuenta de la riqueza de los saberes que tienen todas las personas, niños y adultos, en función de sus contextos, sus condiciones, sus experiencias de vida.

Es indispensable dar cuenta de esa riqueza en función de la información obtenida sobre los aprendizajes que poseen los estudiantes y las situaciones que se dan en torno de lo que pueden seguir adquiriendo. Por otro lado, el diagnóstico no debe verse como una acción unilateral y terminal por parte del docente. Es un proceso colectivo de reconocimiento mutuo, de interpelación sobre las expectativas y necesidades educativas de los miembros de una comunidad.

Esta conceptualización de diagnóstico pedagógico, lo ubica como parte del mismo proceso enseñanza aprendizaje y consiste en un nuevo paradigma de investigación diagnóstica y propone estudiar al sujeto que aprende desde su globalidad y complejidad, lo cual supone reconocer la multidisciplinariedad, multivariada y multinivel, naturaleza de las situaciones educativas.

A partir de estas orientaciones generales, se espera que cada docente titular de cada curso defina las acciones específicas que le corresponden para el desarrollo de dicho proyecto integrador.

En particular, el curso *Álgebra y funciones* permite identificar las problemáticas que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de la disciplina, en un contexto específico y con una población estudiantil en particular, lo que permitirá al estudiantado normalista contextualizar su futura intervención docente.

El diagnóstico pedagógico, desde el curso *Álgebra y funciones*, se define como una práctica en la que se reconocen los saberes matemáticos, las prácticas y los procedimientos matemáticos, en este caso algebraicos, de una comunidad de aprendizaje, esto es, tanto de los estudiantes como de los docentes, que va a guiar la enseñanza. El diagnóstico pedagógico es una práctica que debe realizar todo profesional de la educación previo al diseño de una intervención didáctica.

El diagnóstico como proyecto requiere de una planeación, de tal suerte que conforme avancen las unidades se recuperen para los documentos reflexivos y argumentativos, las reflexiones sobre el estado que guardan los conocimientos algebraicos en las escuelas que están visitando. Estas reflexiones podrán ser el medio para verificar el nivel de desempeño alcanzado a lo largo del curso.

Características del diagnóstico pedagógico

Como se señaló anteriormente, el diagnóstico pedagógico es una práctica que va a guiar la enseñanza previamente de todo profesional de la educación. En el caso de este curso, da cuenta de la vinculación del contexto y la escuela, y de los saberes algebraicos y las prácticas de enseñanza específicas en ese tema que ahí se desarrollan. Es un ejercicio en el que se recupera la riqueza de saberes pues se parte del reconocimiento de que todos hemos tenido experiencias distintas, no todos hemos aprendido lo mismo, y no todos tenemos acceso a lo mismo, por lo que nuestra diversidad se convierte en riqueza durante la interacción.

Es indispensable que el futuro docente vislumbre sus futuras prácticas en función de la información obtenida sobre los aprendizajes algebraicos que poseen los estudiantes y las situaciones que se dan en torno de lo que pueden seguir adquiriendo. No debe verse como una acción unilateral y terminal por parte del docente. Es un acto de reconstrucción de sus saberes y prácticas en función de lo que la comunidad tiene y sus necesidades de saberes matemáticos.

Implicaciones del concepto de diagnóstico

Esta conceptualización de diagnóstico educativo, lo ubica como parte del mismo proceso enseñanza aprendizaje y consiste en un nuevo paradigma de investigación diagnóstica y propone estudiar al sujeto que aprende desde su globalidad y complejidad, lo cual supone, como se mencionó más arriba, reconocer la multidisciplinaria, multivariada y multinivel naturaleza de las situaciones educativas, particularmente las del álgebra.

El objeto de estudio

El objeto de estudio no es sólo el objeto educativo sino el contexto en el que el proceso educativo tiene lugar ya sea la institución escolar con su organización, metodología didáctica, personal y recursos, etc., o la comunidad educativa que rodea dicha institución.

Además, el objeto diagnóstico debe extenderse a referencias más amplias que las incluidas en las instituciones escolares como la familia, la comunidad, cualquier elemento socializador, dado que los problemas y posibilidades

existentes en los sujetos en orden a su educación se derivan tanto de factores endógenos como exógenos, o dicho de otra manera, de los elementos o factores personales y los ambientales.

Metodología

La actividad diagnóstica sigue un proceso metodológico riguroso y sistemático que la convierte en una actividad científico-profesional. Tal vez su característica más singular sea el ser un proceso basado en la metodología general de investigación, pero con la diferencia respecto de la investigación básica es que su objetivo consiste en la aplicación inmediata de sus resultados.

Se trata, pues, de un proceso temporal de acciones sucesivas, estructuradas e interrelacionadas, que, mediante la aplicación de técnicas relevantes que recopilen información empírica del contexto, las voces y saberes algebraicos de los niños expresados en sus cuadernos y apuntes, y el reconocimiento de estrategias específicas de la enseñanza del álgebra, permite el conocimiento, desde una consideración global y contextualizada, de un sujeto que aprende, y cuyo objetivo final es sugerir pautas perfectivas que impliquen la adecuación del proceso de enseñanza-aprendizaje.

La aplicación de una metodología de esta naturaleza requiere habilidades de observación, de registro de detalles, lo que Sherin, Jacobs y Phillip (2011, cit. in López y Zakaryan, 2021) denominan *noticing*, además consideran que sólo se puede percibir aquello para lo que se está preparado para notar.

Los investigadores del *noticing* consideran que es posible el desarrollo de las habilidades asociadas mediante la formación, por lo que es necesario que los formadores alienten a los estudiantes a reflexionar sobre sus propios procedimientos algebraicos, los de sus compañeros de clase, y sus estrategias de enseñanza del álgebra, desde el inicio y conforme avanza este curso.

Etapas

1. Recogida de información
2. Análisis de la información, y
3. Valoración de la información (como fiable/válida) para la toma de decisiones.

Métodos y técnicas

- Observación
- Entrevista

- Análisis documental
- Historia oral, y
- Autobiografía narrativa

Elementos mínimos del diagnóstico

Por lo menos, las variables más relevantes a las que ha de dirigir sus esfuerzos: Quien enseña (el profesor); a quien se enseña (o quien aprende, el alumno); lo que se enseña/aprende (programa/disciplina); cómo se enseña (metodología didáctica); el contexto y marco desde el que se educa y enseña (la sociedad, el sistema educativo, institución, grupo, curso, nivel, etapa, etc.).

Sugerencias de evaluación

Se propone que la evaluación sea un proceso formativo y permanente, en el que se valore constantemente en qué medida los estudiantes normalistas se apropian de los conocimientos, las habilidades y las actitudes que se favorecen al realizar representaciones con expresiones algebraicas, ejecutar cálculos, resolver algoritmos, graficar funciones, modelar situaciones matemáticas, y solucionar problemas que implican el uso del álgebra y funciones en contextos comunitarios.

En este sentido, se pretende realizar en la evaluación un acompañamiento con pertinencia en el aprendizaje, lo que implica desarrollar revisiones oportunas provistas de una retroalimentación que lleve a los normalistas a reconocer sus fortalezas, pero también sus áreas de oportunidad, a fin de consolidar aprendizajes significativos. De esta manera, el papel del docente es reorientar el aprendizaje, además de organizar el trabajo, motivar al logro de los propósitos, y evaluar con pertinencia.

Para tal efecto, la evaluación sugiere tomar como referentes los aprendizajes a lograr en cada unidad del curso, y diseñar actividades de aprendizaje tendientes a movilizar los saberes conceptuales, procedimentales y actitudinales de parte del estudiante normalista. Se trata de posibilitar el acceso a conocimientos, destrezas y disposiciones mediante situaciones problemáticas que generen en los estudiantes la necesidad de utilizar herramientas matemáticas para su organización y solución.

En congruencia con las orientaciones para el aprendizaje y la enseñanza, se sugieren evidencias de aprendizaje, tales como problemarios, organizadores gráficos, carteles, infografías, fotografías argumentadas, videos cortos, gráficas con el apoyo de las TICCAD, modelaciones, ejercicios, y exámenes.

En cuanto a la evaluación sumativa, se propone solicitar una evidencia integradora, resultado de un proyecto integrador, en la que se demuestren los saberes consolidados, y en la que se perciba la aplicabilidad de lo aprendido en contextos comunitarios. Para ello, se aspira a lograr la integración de una evaluación situada, entendida como el resultado de la actividad de la persona que aprende en interacción con otras en las prácticas sociales. De ahí que resulte necesario el trabajo colegiado con el personal docente de todos los cursos del segundo semestre para definir una estrategia que permita la vinculación de actividades o evidencias de aprendizaje, mediante el trabajo articulado del diagnóstico pedagógico.

Se aspira a lograr una evaluación auténtica, que deviene de la enseñanza situada, y “se refiere a que el alumno sea capaz de mostrar un desempeño significativo en el mundo real, en situaciones y escenarios que permitan capturar la riqueza de lo que los alumnos han logrado comprender, solucionar o intervenir en relación con asuntos de verdadera pertinencia y trascendencia tanto personal como social” (Díaz-Barriga, 2006, p. 127).

Herman, Aschbacher y Winters (1992), sostienen que este tipo de evaluación auténtica se caracteriza por “[...] demandar que los aprendices resuelvan activamente tareas complejas y auténticas mientras usan sus conocimientos previos, el aprendizaje reciente y las habilidades relevantes para la solución de problemas reales” (citado en Vallejo y Molina, 2014, p. 14).

Por otro lado, es importante considerar lo que establece el Plan de estudios de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, sobre la evaluación global, la cual se constituye de dos partes:

1. La suma de las unidades de aprendizaje tendrá un valor del 50 por ciento de la calificación.
2. La evidencia integradora o proyecto integrador tendrá el 50 por ciento que complementa la calificación global.

En este semestre se recomienda el trabajo colegiado para desarrollar de manera transversal un diagnóstico pedagógico como proyecto integrador, que a su vez permita la elaboración conjunta de un documento donde se sistematicen sus resultados como evidencia común del semestre para la evaluación de los desempeños del perfil de egreso alcanzados de manera integral, a partir de criterios de evaluación que identifican los aprendizajes específicos de cada curso.

De esta manera, la sistematización de resultados del diagnóstico pedagógico se constituye como una evidencia común a los cursos del segundo semestre, al mismo tiempo que se considera como evidencia integradora del curso *Álgebra y funciones*. No obstante, la evaluación de la evidencia integradora se realiza a partir de criterios de evaluación específicos a los saberes desarrollados en el curso.

Evidencias de aprendizaje

En la siguiente tabla se sugiere la evidencia de los aprendizajes alcanzados en cada una de las Unidades con una descripción que permita al personal docente identificar el nivel de avance o dominio de los desempeños señalados en el perfil

de egreso, considerando los propósitos y contenidos del curso en general y de cada Unidad de aprendizaje.

Estas evidencias se sugieren a partir de considerar el proceso para atender aquellos dominios y desempeños del perfil de egreso general y profesional, que contribuyen al logro de los propósitos del curso y que dan pauta para seleccionar los instrumentos de evaluación

Asimismo, en esta tabla se propone una evidencia integradora, la cual se construye a partir de las evidencias de aprendizaje de cada una de las Unidades, siendo claro su carácter global.

A continuación, se presenta el concentrado de evidencias que se proponen para este curso, en la tabla se muestran cinco columnas, que, cada docente titular o en colegiado, podrá modificar, retomar o sustituir de acuerdo con los perfiles cognitivos, las características, al proceso formativo, y contextos del grupo de normalistas que atiende.

CURSO Álgebra y funciones. Segundo semestre de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas

Unidad de aprendizaje	Evidencias	Descripción	Instrumento	Ponderación
Unidad 1	Material audiovisual comentado	Material audiovisual donde el docente en formación analice, explique, represente y justifique diferentes sucesiones y patrones en la naturaleza e incluso pueda modelarlos mediante expresiones algebraicas haciendo uso de las TICCAD en varios contextos. Ejemplo: la seriación de las partículas cancerígenas, telares, fractales, etc.	Lista de cotejo Rúbrica	50%

Unidad 2	Documento reflexivo	Documento reflexivo a partir de una actividad con problemas contextualizados que aborden algún tema de la unidad tales como resolución de ecuaciones de primer grado, sistemas y desigualdades lineales, así como ecuaciones cuadráticas mediante el uso de la tecnología, con la finalidad de favorecer el pensamiento crítico y científico, así como analizar el comportamiento de problemas intramatemáticos y extramatemáticos.	Lista de cotejo Rúbrica	
Unidad 3	Documento argumentativo.	Documento argumentativo a partir de la toma de decisiones del docente en formación, donde construya alguna actividad con modelos matemáticos expresados algebraicamente, por medio del uso de herramientas tecnológicas a partir de las relaciones	Lista de cotejo Rúbrica	

		entre variables vinculadas con distintos tipos de funciones y sus respectivas gráficas, las cuales están enmarcadas en diferentes disciplinas, así como en su entorno y comunidad.		
Evidencia integradora	Sistematización de resultados del diagnóstico pedagógico.	Documento que organiza, de acuerdo con un programa de actividades, la actividad grupal que integra los aprendizajes de las Unidades de estudio y que se organiza en conjunto, con la participación de docentes, estudiantes y directivos, dando muestra de los aprendizajes logrados.	Lista de cotejo Rúbrica	50%

Unidad de aprendizaje I. Expresiones algebraicas y sus operaciones

Presentación

En la primera unidad se estudiará la generalización de patrones como una ruta de aprendizaje para el desarrollo del pensamiento algebraico, lo anterior considerando el contexto de la resolución de problemas en donde los estudiantes puedan predecir un elemento posterior a uno dado en un conjunto ordenado de números o figuras y posteriormente identificar una regla que rige la secuencia y expresarla de manera algebraica. Además de estudiar las expresiones algebraicas y sus operaciones básicas, los productos notables y la factorización, será de suma importancia favorecer el desarrollo de apercibimiento de estructuras algebraicas, es decir, que los alumnos realicen tareas matemáticas enfocados primeramente en la estructura de las expresiones antes de realizar cualquier procedimiento, lo anterior podrá abrir la puerta para acceder a otro tipo de conocimientos matemáticos. En la medida en la que las y los estudiantes desarrollen el razonamiento podrán ir avanzando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para posteriormente realizar demostraciones por inducción con la finalidad de probar o establecer que una determinada propiedad se cumple para todo número natural, además de que podrán comprender algunas nociones básicas del infinito.

Propósito de la unidad de aprendizaje

Se espera que el docente en formación analice patrones que refieran a sucesiones aritméticas y geométricas; utilice las propiedades, leyes, métodos, algoritmos y procedimientos algebraicos, cuando realiza operaciones algebraicas en la resolución de problemas, mediante la construcción de modelos matemáticos derivados de situaciones del contexto comunitario, del uso de las TICCAD en un ambiente colaborativo, a fin de que desarrolle su pensamiento algebraico y articule sus conocimientos con disciplinas diversas y en otros contextos, así como la reflexión sobre su futura práctica docente.

Contenidos

- Sucesiones con progresión aritmética o geométrica
- Series e inducción matemática

- Nociones básicas de infinito
- Expresiones algebraicas, sus operaciones y propiedades

Estrategias y recursos para el aprendizaje

Para el desarrollo de las actividades de esta unidad de aprendizaje, se sugiere el trabajo colegiado con el personal docente del semestre, con el objeto de vincular actividades y el logro de saberes desde la multi, inter y transdisciplinariedad. Asimismo, se pueden identificar algunas actividades que permiten, de manera conjunta con otros cursos, el desarrollo del diagnóstico pedagógico

Para lograr el propósito de esta unidad de aprendizaje, se sugiere que el normalista elabore organizadores gráficos elaborados en aplicaciones diversas, a fin de que pueda clasificar las expresiones algebraicas, logre la apropiación de conceptos relativos al álgebra e incorpore las TICCAD como parte de su proceso de aprendizaje y también para la enseñanza. Por otro lado, el problemario se vuelve fundamental para que el estudiantado demuestre el saber matemático; en ese orden de ideas, se recomienda que los problemas estén relacionados con el contexto, con el objetivo de darle significatividad, tanto a los procedimientos como los resultados obtenidos. Finalmente, es importante propiciar el trabajo colaborativo, con la finalidad de promover la inclusión y valores de respeto a la diversidad, el cuidado de la salud y el bienestar común, dentro del curso.

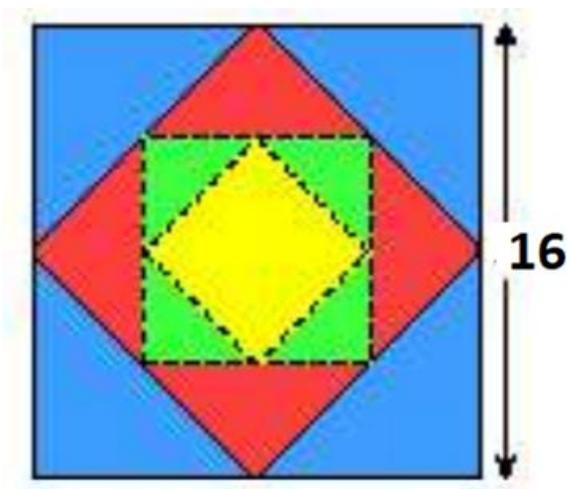
Actividades

Recordar que en este semestre se desarrolla un diagnóstico pedagógico, por lo que la observación del contexto comunitario el de la escuela normal y el que se realiza durante las visitas a las escuelas de práctica profesional permitirá identificar alguna situación o problema actual relacionado con el álgebra y las funciones. Ya sea que el álgebra sea un medio para modelar problemas o para expresar relaciones. Se propondrán problemas diversos relacionados con su cotidianeidad, un ejemplo es el siguiente, ligado a lo vivido durante la pandemia provocada por el SARS-CoV-2.

Se sugiere proponer situaciones como las siguientes:

- a) A las dos de la tarde, una persona está infectada con una enfermedad contagiosa. Una hora más tarde, esa persona infecta a otras dos. Si cada persona sólo se infecta una vez y se continúa a ese ritmo, ¿cuánta gente estará infectada cuando han transcurrido 24 horas?

- b) Encuentra el término general de la sucesión de números triangulares, cuadrados, pentagonales, hexagonales y heptagonales.
- c) Los diferentes cuadrados que hay en la siguiente figura se han obtenido uniendo los puntos medios de cada uno de sus lados.



1. Escribe la sucesión formada por las longitudes de los lados.
2. Calcula la suma de las áreas de los infinitos cuadrados generados de esta forma.

Doblando papel

1. Dobra una tira de papel a la mitad y luego extiendela, posteriormente responde lo siguiente: ¿cuántas partes se observan en la tira desdoblada?
2. Vuelva a doblar la tira a la mitad. Ahora, repita la operación de modo que haya realizado dos dobleces sobre la tira. ¿Cuántas partes se observan en la tira desdoblada?
3. Repite el proceso y responde los siguientes cuestionamientos:
 - a) Si se observan 128 partes en la tira desdoblada. ¿Cuántas veces se ha doblado la tira?
 - b) ¿Es posible observar 10,000 partes en una tira suficientemente larga, sí o no y por qué?
 - c) ¿Cuántas partes se ven en la tira cuando la misma se ha doblado n veces?

Que el docente en formación clasifique expresiones algebraicas de acuerdo con su estructura, por ejemplo:

Expresión algebraica	Estructura
$z^2 x^2 - 9$	Diferencia de cuadrados
$(x + 2)y + (x^2 + 5x + 6) + (x + 2)(x + 5)$	Factor común
$100a^4 + 9b^2 - 60a^2b$	Trinomio cuadrado perfecto
$x^4 - y^4$	Diferencia de cuadrados
$(4x^2 + 12x + 9)^2 + 6(3 + 2x) + 9$	Trinomio cuadrado perfecto

Que el estudiante normalista escriba expresiones algebraicas que tengan estructuras como las anteriores.

En los siguientes ejercicios que el docente en formación reconozca estructuras familiares en su forma más simple y posteriormente elija las manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de dicha estructura de tal forma que pueda resolver el ejercicio.

- a) Si $\frac{x^2 - y^2}{x + y} = a$ ¿cuál es el valor de a cuando $x = 13$ y $y = 7$?

En este caso el alumno debería sustituir el numerador por un producto de binomios conjugados como sigue:

$$\frac{(x+y)(x-y)}{x+y} = a, \text{ por lo tanto } (x - y) = a, \text{ y al sustituir } x \text{ e } y \text{ se obtiene } a = 6$$

- b) Simplificar la expresión

$$\frac{(5a^2 - 1)^2(5a^2 + 1)}{25a^4 + 1 + 10a^2}$$

En esta expresión algebraica se debe considerar el denominador como una sola entidad (trinomio cuadrado perfecto) y factorizar como un producto de binomios, posteriormente cancelar un factor en el numerador y otro en el denominador de tal manera que se obtenga lo siguiente:

$$\frac{(5a^2 - 1)^2(5a^2 + 1)}{25a^4 + 1 + 10a^2} = \frac{(5a^2 - 1)^2(5a^2 + 1)}{25a^4 + 10a^2 + 1} = \frac{(5a^2 - 1)^2(5a^2 + 1)}{(5a^2 + 1)(5a^2 + 1)} = \frac{(5a^2 - 1)^2}{(5a^2 + 1)}$$

Actividad integradora de la unidad de aprendizaje

Proyecto en el que relacionen las sucesiones en la naturaleza.

En esta sección se recomienda, sugerir actividades en las que el estudiantado sea el protagonista de su aprendizaje y el de sus colegas. Se recomienda que dichas actividades cumplan con los siguientes criterios:

- Contar con una congruencia entre los desempeños y el propósito de la unidad, para su diseño, deberán partir de las características de la evidencia integradora de la unidad y de los criterios de evaluación del desempeño.
- Tener una secuencia lógica y estructurada
- Promover el trabajo individual y colectivo
- Promover la narrativa matemática
- Conducir a la elaboración de la evidencia de aprendizaje de la unidad.
- Promover que el estudiantado participe y sea protagonista de su aprendizaje, por ejemplo, en la búsqueda de soluciones a problemas específicos.
- Demostrar algunos de los temas a aprender e incentivar a que el estudiantado las experimente y reflexione sobre su experiencia.
- Sugerir algunas actividades en diferentes plataformas con el uso de las tecnologías de la información, comunicación, conocimiento y aprendizaje digital (TICCAD).
- Tener congruencia con las orientaciones metodológicas descritas arriba.

Evaluación de la unidad

Derivado de las actividades, se presenta la evidencia de aprendizaje y criterios de evaluación de los desempeños, por lo que es importante recordar al profesorado que el proceso formativo comienza cuando el estudiante tiene claridad sobre los resultados del aprendizaje deseado y sobre la evidencia que mostrará dichos aprendizajes. De ahí la importancia de que los criterios del desempeño y las características de las evidencias sean conocidos por el estudiantado desde el inicio del curso.

Este cuadro se elabora tomando en cuenta los dominios y desempeños a los que atiende el curso, conformados en el ser, ser docente, hacer y la vinculación con la comunidad.

Como evidencia de aprendizaje para evaluar esta unidad, se sugiere la elaboración de material audiovisual comentado, donde el docente en formación analice, explique, represente y justifique diferentes sucesiones y patrones en la naturaleza, e incluso pueda modelarlos mediante expresiones algebraicas, haciendo uso de las TICCAD en varios contextos. Ejemplo: la seriación de las partículas cancerígenas, telares, fractales, etc.

Evidencia de la unidad	Criterios de evaluación
Material audiovisual comentado	<p>Saber conocer</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Conoce la estructura y los algoritmos asociados a sucesiones con progresión aritmética o geométrica. ● Reconoce series y los procesos lógicos asociados a la inducción matemática. ● Expresa nociones básicas de infinito. ● Conoce diversos tipos de expresiones algebraicas, sus representaciones, sus operaciones y propiedades. <p>Saber hacer</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Realiza operaciones propias del álgebra. ● Utiliza las TICCAD en la elaboración del material audiovisual. ● Emplea fuentes de información confiables. <p>Saber ser y estar</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Participa de manera activa en el desarrollo de actividades y la construcción de su propio aprendizaje.

	<ul style="list-style-type: none"> • Respetar las opiniones de los demás y valora la diversidad en el aula. • Demuestra responsabilidad y organización para la entrega de las actividades en tiempo y forma. <p>Vinculación con la comunidad</p> <ul style="list-style-type: none"> • Incorpora saberes comunitarios • Reconoce los saberes ligados a las matemáticas en su contexto y en el contexto de la escuela de práctica, particularmente al álgebra. • Establece relación con el contexto a través de ejemplos.
--	---

Bibliografía

A continuación, se presentan un conjunto de fuentes como sugerencias para abordar los contenidos de esta unidad, pero el profesorado puede determinar cuáles de ellas abordar durante las sesiones del curso o proponer otras.

Bibliografía básica

Bermejo, F.; Bermejo, M.; Hernández, S. F.; Carmona, K.; Tenorio, J. & Santos, J. (2022). *Conversaciones heurísticas algebraicas*. México: Ediciones Roisa.

Cárdenas, H; Lluís, E.; Raggi, F. & Tomás, F. (2000). *Álgebra Superior*. México: Editorial Trillas.

Gómez Laveaga, C. (2014). *Álgebra Superior Curso Completo*. Primera Edición. México: Dirección General de Publicaciones y Fomento Editorial, UNAM.

Bibliografía complementaria

Elizarraras, S. (2021). Resolución de problemas geométricos en el aula de bachillerato: tratamiento ecológico de errores. *Praxis Educativa ReDIE. Revista Electrónica de la Red Durango de Investigadores Educativos*, A. C. 13(24), 79-91. Recuperado de: <https://sites.google.com/utd.edu.mx/praxis-educativa/publicaciones/per-24/v24-d6>

Swokowski, E.W., Cole J. A. (2011). Álgebra y Trigonometría con geometría analítica. 13ª edición. México: Cengage Learning Editores.

Hoch, M. & Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp. 305–312). Prague, Czech Republic: Faculty of Education, Charles University in Prague.

Muñoz-Porras, V., & Rojano, T. Algebra structure sense in a web environment: design and testing of the expression machine. *Technology in Mathematics Teaching ICTMT 13 Ecole Normale Supérieure de Lyon/Université Claude Bernard Lyon 1 3 to 6 July, 2017*, 159.

Materiales y soportes didácticos

Manipulables (papel, dibujos, entre otros)

Software (GeoGebra, MATLAB)

Videos

<https://meet.google.com/cpt-qysu-wzp?pli=1&authuser=2>

<https://www.youtube.com/watch?v=CjWK16c0oU8>

[Noción de límite | Introducción a los límites | Matemáticas | Cálculo](#)

Sitios web

<http://galileo2.com.mx>

<http://arquimedes.mate.unam.mx>

Unidad de aprendizaje II. Ecuaciones y desigualdades

Presentación

En la segunda unidad se iniciará con el estudio de la razón, proporción y variación para posteriormente analizar y modelar situaciones problemáticas en el contexto de las ecuaciones (lineales, cuadráticas y sistemas de ecuaciones) las cuales podrán ser resueltas mediante la aplicación de reglas algebraicas de transformación para manipular la literal, no haciendo a un lado el uso de procedimientos personales o intuitivos. Es importante que en el proceso de resolución de ecuaciones se haga énfasis en las propiedades de la igualdad, además de ello es importante que en la resolución de dichas ecuaciones el docente en formación busque formas eficientes de resolverlas, a partir de que analice la estructura de sus elementos implícitos y explícitos y las relaciones entre ellos, de tal manera que reconozca estructuras familiares en su forma más simple que lo puedan llevar a obtener una ecuación mucho más simple.

Propósito de la unidad de aprendizaje

Se espera que las y los estudiantes normalistas planteen y resuelvan situaciones en contextos diversos al enfrentarse a problemas que sean modelados mediante ecuaciones de primer grado, sistemas y desigualdades lineales, así como ecuaciones cuadráticas con el uso de la tecnología para favorecer el pensamiento crítico y científico.

Contenidos

- Razón, proporción y variación
- Ecuaciones lineales
- Sistemas de ecuaciones lineales
- Desigualdades lineales
- Sistemas de desigualdades lineales
- Ecuaciones cuadráticas

Estrategias y recursos para el aprendizaje

Para el desarrollo de esta unidad de aprendizaje, se puede establecer un trabajo colegiado con el titular del curso *Soportes tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas* en dos sentidos, el primero para el uso de herramientas y plataformas digitales que favorezcan la enseñanza y aprendizaje del contenido disciplinar; el segundo, para desarrollar actividades conjuntas que permitan caracterizar las habilidades digitales y saberes disciplinares del profesorado y estudiantado que se observa durante el diagnóstico pedagógico.

De la misma manera, para esta segunda actividad colegiada, también podrá vincularse con el profesorado del curso *Análisis de prácticas y contextos escolares*. Por lo que se sugiere retomar problemas de las ciencias naturales, e incluso de las ciencias sociales, como la economía, procurando la vinculación con otras licenciaturas o recuperar los saberes de otros profesionistas.

A continuación, se presentan algunas actividades:

Se sugiere una actividad relacionada con la variación directamente proporcional, en la que se propone el análisis de los datos, a partir de preguntas orientadoras y, de esta manera, favorecer la adquisición de conceptos matemáticos, relaciones y proposiciones.

1. Al medir durante cierto tiempo los litros de sangre que bombea el corazón de una persona, cuyo peso es de 70 kg, se obtuvieron algunos de los datos registrados en la siguiente tabla, complétala y realiza lo que se te pide.

Cantidad de sangre (litros)	5			20	25		35		45			60
Tiempo (minutos)				4			7			10		12

- a) ¿Cómo se relacionan el tiempo y el número de litros de sangre que bombea el corazón?
- b) Expresa las razones que representan la relación entre el tiempo transcurrido y el número de litros de sangre que bombea el corazón.
- c) Calcula el cociente de cada una de las razones anteriores.

- d) ¿Qué características tienen en común los cocientes de las razones?
- e) ¿Cómo se les conoce a las razones que mantienen una relación de igualdad?
- f) Completa la proposición siguiente:

Dos o más razones son _____ cuando el cociente de sus valores es _____.

- 2. Al igual que en el caso anterior, en las líneas siguientes se muestra un ejemplo con el que se pueden estudiar las características de la variación inversamente proporcional, en el cual también se incluye una serie de preguntas que ponen de relevancia los conceptos matemáticos, las relaciones y las proposiciones.
- 3. Un depósito de agua se llena en $11 \frac{1}{4}$ horas con sólo una llave de agua. Completa la tabla, considerando que siempre que aumenta el número de llaves éstas tienen el mismo diámetro y vierten la misma cantidad de líquido.

Núm. de llaves	1	2	3	4	6	7	8	9
Tiempo (horas)	$11 \frac{1}{4}$							

- a) ¿Qué ocurre con el tiempo que tarda en llenarse el depósito a medida que se utilizan más llaves?
- b) ¿Cómo es el resultado que se obtiene al multiplicar el número de llaves utilizadas por el tiempo transcurrido en cada uno de los casos?
- c) ¿Qué tipo de relación mantienen los productos de las razones anteriores?
- d) Completa la proposición siguiente:

Dos o más razones son _____ cuando los productos obtenidos al multiplicar los términos de cada una de las razones son _____.

4. Solicitar a los alumnos que representen diversas situaciones mediante el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones lineales. Algunas situaciones pueden ser las siguientes:

- A. Dos terrenos pequeños tienen la misma área, uno tiene forma cuadrada y otro rectangular. El largo del rectángulo es 6 metros mayor que el lado del terreno cuadrado, y su ancho es 4 m menor. Calcula las dimensiones y áreas de ambos terrenos.

El estudiante debería plantear la siguiente ecuación y posteriormente resolverla para obtener las dimensiones y las áreas solicitadas.

$$x^2 = (x+6)(x-4)$$

$$x^2 = x^2 + 2x - 24$$

$$0 = 2x - 24$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

Cuadrado de lado 12 m

Rectángulo ancho 8 m, largo 18 m

Área de cada terreno 144 m²

- B. Hallar 3 números consecutivos enteros, tales que, la diferencia de la suma del menor más el cuadrado del siguiente menos el mayor sea igual a 47.

Los estudiantes podrán plantear la siguiente ecuación cuadrática que modela la situación y, posteriormente, resolverla para encontrar los 3 números consecutivos.

$$x + (x+1)^2 - (x+2) = 47$$

$$x + x^2 + 1 + 2x - x - 2 = 47$$

$$x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$(x-6)(x+8) = 0$$

Los números son 6, 7 y 8

5. Proponer al estudiante en formación que resuelva ecuaciones a partir de que analice la estructura de sus elementos implícitos y explícitos y las relaciones entre ellos, de tal manera que reconozca estructuras familiares en su forma más simple que lo puedan llevar a obtener una ecuación mucho más simple.

$$a) 4(7 - y) + 2y(7 - y) = 0$$

En esta ecuación lo más probable es que el estudiante desarrolle los productos. Si fuera el caso, plantear la siguiente pregunta:

¿Habría otra manera de resolver la ecuación que no sea desarrollar los productos $4(7-y)$ y $2y(7-y)$?

Si el estudiante no encontrara una manera distinta de resolver la ecuación, solicitar que identifique un factor común de tal manera que obtenga lo siguiente:

$$(7 - y)(4 + 2y) = 0$$

$$7 - y = 0$$

$$y_1 = 7$$

$$4 + 2y = 0$$

$$2y = -4$$

$$y_2 = -2$$

$$b) \frac{1}{4} - \frac{x}{x-1} - x = 5 + \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1}\right)$$

En esta ecuación el alumno deberá darse cuenta que no se requiere operar $\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1}$ ya que se puede eliminar en ambos lados quedando $-x = 5$, o bien, multiplicando por -1 se obtendría $x = -5$

No hay que perder de vista que en todas las actividades que se propongan, el formador deberá hacer un alto para que los estudiantes reflexionen sobre los procesos que han seguido en la construcción del conocimiento matemático, y las estrategias de los formadores.

De la misma manera, es importante que vislumbren los procedimientos que podrían seguir los estudiantes de secundaria, y las estrategias didácticas de los docentes. Para que la reflexión pueda estar sustentada, se sugiere la lectura de algunos documentos de didáctica del álgebra. Estas actividades también abonarán al diagnóstico pedagógico

6. A continuación, se presenta una sucesión de eventos para plantear y resolver sistemas de ecuaciones lineales 2×2 .
 - i. Que el estudiante normalista comprenda y plantee ecuaciones de primer grado, con más de una incógnita que modelen situaciones de la vida cotidiana.

Ana fue al mercado a comprar arroz y jitomate. Si compró 2 kilos de arroz y kilo y medio de jitomate, y en total pagó 58 pesos, ¿cuál es la ecuación que representa la situación anterior?

$$2x + 1.5y = 58$$

- ii. Que el estudiante normalista logre el planteamiento de dos ecuaciones lineales, usando dos incógnitas. Para luego resolver el problema y responder preguntas que deriven de la solución encontrada.

En el cine del centro se sabe que el lunes se registró un ingreso de \$1730 por la venta de 32 boletos para adulto y 18 para niño, mientras que el martes el ingreso fue de \$2075 por 45 boletos de adulto y 11 de niño.

$$32x + 18y = 1730$$

$$45x + 11y = 2075$$

- a) ¿Cuánto cuesta cada boleto de adulto y de niño?

b) *Entonces ¿Cuánto ingreso a la taquilla el miércoles si se vendieron 28 entradas de adulto y 7 de niño?*

- iii. Que el estudiante normalista conozca distintos métodos para resolver un sistema de ecuaciones (2x2) y compruebe que todos resuelven de igual forma un problema.
 - a) Método de igualación.
 - b) Método de sustitución.
 - c) Método de sumas y restas.
 - d) Método por determinantes (regla de Cramer).
 - e) Método gráfico.
- iv. Que resuelva sistemas de ecuaciones con los métodos aprendidos e interprete las respuestas obtenidas.
- v. Que el estudiante normalista logre identificar si un sistema tiene o no tiene solución, y cuál es su representación gráfica.

Cuando sea el momento de trabajar desigualdades

1. Concepto de desigualdad
2. Reglas de equivalencia
3. Resolución de desigualdades de primer grado
4. Sistemas de desigualdades lineales

Evaluación de la unidad

A continuación, se muestra un cuadro que se elabora tomando en cuenta los dominios y desempeños a los que atiende el curso, conformados en el ser, ser docente, hacer y la vinculación con la comunidad. El formador tendrá en cuenta la importancia de que los criterios del desempeño y las características de las evidencias sean conocidos por el estudiantado desde el inicio del curso.

Para la evaluación de esta unidad de aprendizaje, se sugiere elaborar un documento reflexivo, a partir de una actividad con problemas contextualizados que aborden algún tema de la unidad, tales como resolución de ecuaciones de primer grado, sistemas y desigualdades lineales, así como ecuaciones cuadráticas mediante el uso de la tecnología, con la finalidad de favorecer el

pensamiento crítico y científico, así como analizar el comportamiento de problemas intramatemáticos y extramatemáticos.

Evidencia de la unidad	Criterios de evaluación
Documento reflexivo.	<p>Saber conocer</p> <ul style="list-style-type: none"> • Entiende el concepto de razón, proporción y variación. • Identifica las ecuaciones lineales, desde la perspectiva algebraica y gráfica. • Reconoce los elementos que conforman los sistemas de ecuaciones lineales, así como los sistemas de desigualdades lineales • Comprende el concepto de desigualdades lineales. • Distingue las ecuaciones cuadráticas desde el enfoque algebraico y gráfico. <p>Saber hacer</p> <ul style="list-style-type: none"> • Resuelve problemas que impliquen la utilización de razones y proporciones. • Resuelve problemas relacionados con ecuaciones lineales, ecuaciones cuadráticas, sistemas de ecuaciones lineales, así como sistemas de desigualdades lineales. • Utiliza las TICCAD la elaboración del material audiovisual. • Emplea fuentes de información confiables. <p>Saber ser y estar</p> <ul style="list-style-type: none"> • Participa de manera activa en el desarrollo de actividades y la construcción de su propio aprendizaje.

	<ul style="list-style-type: none"> ● Respetar las opiniones de los demás y valora la diversidad en el aula. ● Demuestra responsabilidad y organización para la entrega de las actividades en tiempo y forma. <p>Vinculación con la comunidad</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Incorpora saberes comunitarios ● Reconoce los saberes ligados a las matemáticas en su contexto y en el contexto de la escuela de práctica, particularmente al álgebra, y de otras disciplinas. ● Establece relación con el contexto a través de ejemplos.
--	---

Bibliografía

A continuación, se presentan un conjunto de fuentes como sugerencias para abordar los contenidos de esta unidad, pero el profesorado puede determinar cuáles de ellas abordar durante las sesiones del curso o proponer otras.

Bibliografía básica

Bermejo, F.; Bermejo, M.; Hernández, S. F.; Carmona, K.; Tenorio, J. & Santos, J. (2022). *Conversaciones heurísticas algebraicas*. México: Ediciones Roisa.

Gómez Laveaga, C. (2014). *Álgebra Superior Curso Completo*. Primera Edición. México: Dirección General de Publicaciones y Fomento Editorial, UNAM.

Cárdenas, H; Lluis, E.; Raggi, F.; Tomás, F. (2000). *Álgebra Superior*. México: Editorial Trillas.

Bibliografía complementaria

Swokowski, E.W., Cole J. A. (2011). *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica*. 13ª edición. México: Cengage Learning Editores.

Videos

<https://www.youtube.com/watch?v=M8QHhcNtcww>

<https://www.youtube.com/watch?v=jSZWvCh2PqI>

Recursos de apoyo

Manipulables (papel, dibujos, entre otros)

Software (GeoGebra, MATLAB)

Sitios web

<http://galileo2.com.mx>

<http://arquimedes.mate.unam.mx>

Unidad de aprendizaje III. Funciones y variación

Presentación

Para la tercera unidad es importante recuperar los conocimientos, las habilidades y destrezas que se trabajaron en la primera y segunda unidad, especialmente en las expresiones algebraicas, ecuaciones y sus operaciones, promoviendo el trabajo colaborativo y autónomo para la aplicación de los mismos en temas de esta unidad.

En la tercera unidad el estudio de las funciones deberá centrarse en indagar relaciones en contextos que sean significativos para los alumnos, usando diversos métodos de representación (gráficas, tablas y expresiones algebraicas) para analizar dichas relaciones. El énfasis en conjuntos como rango y dominio, además de la lectura, producción y análisis de gráficas puede considerarse siempre y cuando haya un propósito específico para su inclusión.

Proponer situaciones desafiantes que permitan a los estudiantes cuestionar, analizar e interpretar modelos matemáticos por medio del planteamiento de funciones, así como su interpretación gráfica o analítica que le permitirán observar y entender su entorno, propiciando el uso de herramientas digitales y materiales didácticos, entre otros.

Propósito de la unidad de aprendizaje

Que el docente en formación construya modelos matemáticos por medio del uso de herramientas tecnológicas, a partir de las relaciones entre variables vinculadas con distintos tipos de funciones y sus respectivas gráficas, las cuales están enmarcadas en diferentes disciplinas, así como en su entorno y comunidad.

Contenidos

- Relaciones y funciones
- Tipos de funciones
- Las funciones y sus gráficas
- Modelos matemáticos y funciones

Estrategias y recursos para el aprendizaje

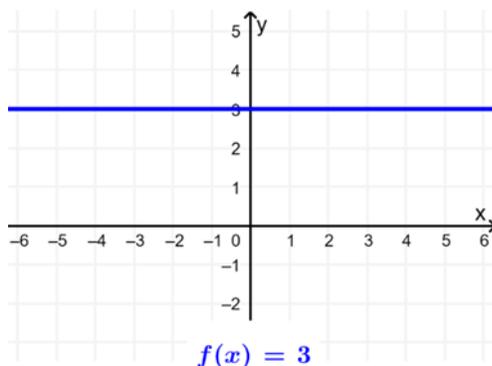
Nuevamente se sugiere que esta unidad de aprendizaje se desarrolle en colegiado con los cursos *Soportes tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas*, *Tratamiento de la información* y *Análisis de prácticas y contextos escolares* para el desarrollo del diagnóstico pedagógico.

En el tema de tipos de funciones, los alumnos deberán identificar el tipo de función y sus características más importantes a partir de su gráfica:

Ejemplo:

Función constante

La función constante es una función polinómica de cero grados, en donde tenemos $f(x) = f(0) = c$. Sin importar cuál sea el valor de entrada, la función siempre resulta en el mismo valor constante.



Es importante proporcionar problemas en los que las funciones sirven como herramienta para la modelación de situaciones.

Ahora bien, algunos problemas permitirán el desarrollo del pensamiento crítico, como el siguiente:

Un agente de ventas recibe dos ofertas de empleo de una misma compañía: un salario mensual base de \$1500 pesos más 8% de comisión sobre las ventas, o bien 15% de comisión sobre las ventas, sin salario base. Escriban en cada caso una función para indicar cómo los ingresos del agente dependen de las ventas que realiza. Construyan una tabla para comparar los ingresos posibles en cada caso ¿En qué caso le conviene aceptar una u otra oferta de empleo? ¿De qué manera ayuda en el análisis de la problemática contar con dos o más representaciones del mismo problema?

La secuencia completa podrán encontrarla en la Conversación 4 del libro Bermejo, F.; Bermejo, M.; Hernández, S. F.; Carmona, K.; Tenorio, J. & Santos, J. (2022). *Conversaciones heurísticas algebraicas*, pp. 59-64.

Al igual que en la unidad anterior, en todas las actividades que se propongan, el formador deberá propiciar en los estudiantes la reflexión sobre los procesos que han seguido en la construcción del conocimiento matemático, y las estrategias de los formadores.

De la misma manera, es importante que vislumbren los procedimientos que podrían seguir los estudiantes de secundaria y de la media superior, y las estrategias didácticas de los docentes. Para ello se sugiere una vinculación con el docente del curso *Análisis y desarrollo curricular*, en la que se han analizado los propósitos y contenidos del Álgebra que se abordan en la secundaria y en la media superior, y donde se analizan materiales de apoyo al trabajo docente, como libros de texto.

Es importante recuperar los conocimientos algebraicos de diferentes contextos comunitarios, y compararlos con los aprendizajes que están desarrollando en este curso.

Para que la reflexión pueda estar sustentada, se sugiere la lectura de algunos documentos de didáctica del álgebra, como el de Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. & Trigueros, M. (2005).

Estas actividades también abonarán al diagnóstico pedagógico, específicamente a la identificación de los saberes, las prácticas y los procedimientos algebraicos de una comunidad de aprendizaje.

Evaluación de la unidad

A continuación, se muestra un cuadro que se elabora tomando en cuenta los dominios y desempeños a los que atiende el curso, conformados en el ser, ser docente, hacer y la vinculación con la comunidad. El formador tendrá en cuenta la importancia de que los criterios del desempeño y las características de las evidencias sean conocidos por el estudiantado desde el inicio del curso.

Para evaluar esta unidad, se sugiere la elaboración de un documento argumentativo a partir de la toma de decisiones del docente en formación, donde construya alguna actividad con modelos matemáticos expresados algebraicamente, por medio del uso de herramientas tecnológicas, a partir de las relaciones entre variables vinculadas con distintos tipos de funciones y sus

respectivas gráficas, las cuales están enmarcadas en diferentes disciplinas, así como en su entorno y comunidad.

Evidencia de la unidad	Criterios de evaluación
Documento argumentativo.	<p>Saber conocer</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Caracteriza las condiciones necesarias y suficientes de los conceptos de relación y función. ● Deslinda funciones de relaciones. ● Reconoce tipos de funciones. ● Conoce diversas representaciones matemáticas para funciones y relaciones. ● Identifica gráfica y analíticamente funciones y relaciones. <p>Saber hacer</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Modela problemas con la utilización de funciones y relaciones. ● Resuelve problemas con funciones y relaciones. ● Encuentra raíces reales e imaginarias de funciones polinomiales con diversos métodos. ● Utiliza las TICCAD la elaboración del material audiovisual. ● Emplea fuentes de información confiables. <p>Saber ser y estar</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Participa de manera activa en el desarrollo de actividades y la construcción de su propio aprendizaje. ● Respeta las opiniones de los demás y valora la diversidad en el aula.

	<ul style="list-style-type: none"> • Demuestra responsabilidad y organización para la entrega de las actividades en tiempo y forma. <p>Vinculación con la comunidad</p> <ul style="list-style-type: none"> • Incorpora saberes comunitarios. • Establece relación con el contexto.
--	--

Bibliografía

A continuación, se presentan un conjunto de fuentes como sugerencias para abordar los contenidos de esta unidad, pero el profesorado puede determinar cuáles de ellas abordar durante las sesiones del curso o proponer otras.

Bibliografía básica

Bermejo, F.; Bermejo, M.; Hernández, S. F.; Carmona, K.; Tenorio, J. & Santos, J. (2022). *Conversaciones heurísticas algebraicas*. México: Ediciones Roisa.

Gómez Laveaga, C. (2014). *Álgebra Superior Curso Completo*. Primera Edición. México: Dirección General de Publicaciones y Fomento Editorial, UNAM.

Cárdenas, H; Lluis, E.; Raggi, F.; Tomás, F. (2000). *Álgebra Superior*. México: Editorial Trillas.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. & Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. México, Trillas.

Bibliografía complementaria

Swokowski, E.W., Cole J. A. (2011). *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica*. 13ª edición. México: Cengage Learning Editores.

Videos

[Qué es función | Concepto de función](#)

<https://www.youtube.com/watch?v=X-iGXl1xFdE>

<https://www.youtube.com/watch?v=M8QHhcNtcww>

<https://www.youtube.com/watch?v=jSZWvCh2PqI>

Recursos de apoyo

Manipulables (papel, dibujos, entre otros)

Software (GeoGebra, MATLAB)

Sitios web

<http://galileo2.com.mx>

<http://arquimedes.mate.unam.mx>

Evidencia integradora del curso

Se sugiere un trabajo colegiado con el personal docente de los cursos del mismo semestre, en particular con el titular del curso *Análisis de prácticas y contextos escolares*, para orientar al estudiantado en la elaboración del documento que sistematiza los resultados del diagnóstico pedagógico.

Como se señaló anteriormente, el diagnóstico pedagógico se define como una práctica. En particular este curso busca que, mediante el diagnóstico, el estudiantado reconozca los saberes, las prácticas y los procedimientos algebraicos de una comunidad de aprendizaje, esto es, tanto de los estudiantes como de los docentes y de la comunidad, que va a ser referente para la enseñanza.

El diagnóstico se fue construyendo conforme avanzaron las unidades; dicho diagnóstico se recuperó en los diversos documentos de las evidencias de las unidades, y se complementaron con las reflexiones sobre el estado que guardan los conocimientos algebraicos en las escuelas que se visitaron durante la práctica profesional. Estas reflexiones podrán ser el medio para verificar el nivel de desempeño alcanzado a lo largo del curso.

El personal docente podrá diseñar otros criterios de evaluación que considere necesarios para valorar el logro de saberes de este curso.

Evidencia integradora:	Criterios de evaluación de la evidencia integradora
<p>Sistematización de resultados del diagnóstico pedagógico.</p> <p>Documento que organiza, de acuerdo con un programa de actividades, los saberes y las prácticas de una comunidad escolar, la actividad grupal que integra los aprendizajes de las Unidades de estudio y que se organiza en conjunto, con la participación de docentes, estudiantes y directivos, dando muestra de las capacidades logradas.</p>	<p>Saber conocer</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Conoce los contenidos de álgebra de la educación básica y la media superior. ● Reconoce algunas estrategias de aprendizaje y construcción de conocimiento algebraico por parte de estudiantes normalistas y de los estudiantes de la educación obligatoria ● Reconoce las estrategias docentes asociadas a la enseñanza del álgebra. <p>Saber hacer</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Utiliza estrategias metodológicas para recuperar el conocimiento que se

	<p>construye en un determinado contexto.</p> <p>Saber ser y estar</p> <ul style="list-style-type: none">● Reconoce el papel de los docentes de matemáticas en la generación de conocimiento matemático. <p>Vinculación con la comunidad</p> <ul style="list-style-type: none">● Incorpora saberes comunitarios● Establece relación con el contexto a través de ejemplos.
--	---

Perfil académico sugerido

Nivel académico

Licenciatura en: Matemáticas, Educación en la Especialidad en Matemáticas, Física, otras afines

Obligatorio nivel de licenciatura, preferentemente maestría o doctorado en el área de conocimiento de educación matemática, matemáticas, física, o ciencias exactas.

Deseable: Experiencia de investigación en el área.

Experiencia docente para:

- Conducir grupos
- Planear y evaluar para el desarrollo de capacidades, habilidades y competencias
- matemáticas
- Trabajo por proyectos
- Utilizar las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje
- Retroalimentar oportunamente el aprendizaje de los estudiantes

Experiencia profesional

En escuelas normales o instituciones de educación superior en áreas afines, al menos dos años frente a grupo ya sea en el sector público, privado o de la sociedad civil.

Referencias de este programa

- Booth, L.R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errores. A report of the strategies and errores in Secondary Mathematics Proyect*. Winsor, England: NFER-Nelson.
- Carraher, T., Carraher, D. & Schliemann, A. (1991). *En la vida diez, en la escuela cero*. Buenos Aires: Siglo XXI editores.
- Cedillo, T. (1999). *Nubes de puntos y modelación algebraica*. México: Iberoamérica.
- Chan, P. E., Konrad, M., Gonzalez, V., Peters, M. T., & Ressa, V. A. (2014). The Critical Role of Feedback. *Formative Instructional Practices. Intervention in School and Clinic*, 50(2), 96-104. <https://doi.org/10.1177/1053451214536044>
- Díaz-Barriga, F. (2006). *Enseñanza situada: vínculo entre la escuela y la vida*. Mcgraw-Hill.
- Elizarraras, S. (2021). Resolución de problemas geométricos en el aula de bachillerato: tratamiento ecológico de errores. *Praxis Educativa ReDIE. Revista Electrónica de la Red Durango de Investigadores Educativos*, A. C. 13(24), 79-91. Recuperado de: <https://sites.google.com/utd.edu.mx/praxis-educativa/publicaciones/per-24/v24-d6>
- Filloy, E.; Rojano, T. & Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.
- Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.
- Herman, J. L., Aschbacher, P., & Winters, L. (1992). A practical guide to alternative assessment. Association for Supervision & Curriculum Development. En Vallejo Ruiz, M., & Molina Saorín, J. (2014). *La evaluación auténtica de los procesos educativos. Revista Iberoamericana de Educación*, 64, 11-25. <https://doi.org/10.35362/rie640403>.
- Herscovics, N. & Linchevsky, L. (1994). A Cognitive Gap Between Arithmetic and Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 59-78. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- Hitt, F. (2002). *Funciones en contexto*. México: Pearson.
- Hoch, M. (2003). Structure sense. In M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the 3rd Conference for European Research in Mathematics Education (CD)*.

- Bellaria, Italy: CERME. M. Consultado 18/05/2012 en: http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG6/TG6_hoch_cerme3.pdf.
- Hoch, M. & Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp. 305–312). Prague, Czech Republic: Faculty of Education, Charles University in Prague.
- Kieran, C. (1992). "The Learning and Teaching of School Algebra", en D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). Nueva York, MacMillan.
- Kieran C. (2004). The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. En Kaye Stacey, Helen Chick & Margaret Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- López. L. M. & Zakaryan, D. (2021). Relacionando el conocimiento especializado del profesor de matemáticas con la competencia *noticing*. *V Congreso Iberoamericano sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas*, 3-5 de noviembre del 2021. On line. <https://cdn.congresse.me/bikiol6o8yl2v6ybdqbnasslmexs>
- MacGregor, M. (2004). Goals and Content of an Algebra Curriculum for the Compulsory Years of Schooling. En Kaye Stacey, Helen Chick & Margaret Kendal (Eds.). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- Papini M. C. (2003). Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 6(1). 41-71.
- Schliemann, A. D., Carraher, D., & Brizuela, B. M. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética: de las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Buenos Aires: Editorial Paidós
- Socas, M.; Palarea, M. M. & Ruano, R. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. En Castro, Encarnación (Ed.), *Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la*

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 311-322). Granada: Universidad de Granada.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Palarea, M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *Números. Revista de Didáctica de la Matemática*, 40, 3-28.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas* 77, 5 – 34.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. & Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. México, Trillas.

Vallejo, M & Molina, J (2014). *La evaluación auténtica de los procesos educativos. Revista Iberoamericana de Educación*, 64 (2014), pp. 11-25 (ISSN: 1022-6508) - OEI/CAEU

Vergnaud, G. (1987). Problem solving and concept development in the learning of mathematics. *E.A.R.L.I. Second Meeting*. Tübingen.