

Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria

Plan de Estudios 2018

Programa del curso

Cálculo Diferencial

Sexto semestre



Primera edición: 2021
Esta edición estuvo a cargo de la
Dirección General de Educación Superior para el Magisterio
Av. Universidad 1200. Quinto piso, Col. Xoco,
C.P. 03330, Ciudad de México
D.R. Secretaría de Educación Pública, 2021
Argentina 28, Col. Centro, C. P. 06020,
Ciudad de México

Contenido

Propósito y descripción general del curso	5
Propósito general	5
Antecedentes	5
Características	7
Cursos con los que se relaciona	7
Sugerencias o recomendaciones generales a atender	8
Competencias del perfil de egreso a las que contribuye el curso	10
Estructura del curso	12
Orientaciones para el aprendizaje y enseñanza	14
Sugerencias de evaluación	15
Unidad de aprendizaje I. Números reales y funciones	16
Unidad de aprendizaje II. Límites y continuidad	23
Unidad de aprendizaje III. Derivación	29
Proyecto integrador del curso	35
Perfil docente sugerido	37
Referencias bibliográficas de este programa	38

Trayecto formativo: **Formación para la enseñanza y el aprendizaje.**
Carácter del curso: **Obligatorio** Horas: **4** Créditos: **4.5**

Propósito y descripción general del curso

Propósito general

Se espera que el estudiantado normalista:

Argumente resultados obtenidos, derivado de la construcción de modelos matemáticos al resolver problemas relacionados con las ciencias naturales, las ciencias sociales y las humanidades, que impliquen el uso de límites y continuidad, así como la derivada de una función; reflexionando sobre los ambientes de aprendizaje con y sin tecnología a fin de que fortalezcan su formación profesional; y evidenciando una actitud proactiva y de colaboración.

Antecedentes

Distintas investigaciones muestran una serie de reflexiones que tratan sobre la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo (Bringas y Godoy, 2007; Godoy, s/f), tales reflexiones hacen énfasis sobre el papel que juegan los problemas para enseñar el Cálculo Diferencial. A su vez, varias son las investigaciones referidas a este tema que enfatizan que los problemas tienen un valor fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje, y que la resolución de problemas es un recurso trascendental para aprender Cálculo, y, en consecuencia, es una de las principales estrategias para enseñarlo (Godoy, s/f; Ruíz y Grijalva, 2018).

Existen propuestas de investigación dirigidas a la enseñanza del cálculo que se enfocan en el estudio del cálculo de las magnitudes variables (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2003; Vasco, 2003; Ramos y Jiménez, 2014) así también, se reportan una serie de dificultades asociadas a la comprensión del concepto de variable debido a los diversos usos que se hacen de ella en las aulas de clases (Schoenfeld y Arcavi, 1988), específicamente el área dirigida a la formación de los futuros profesores de matemáticas de secundaria, reporta que existen dificultades por parte de estudiantes en formación para profesor, en distinguir una incógnita de una variable, y una ecuación de una función (Wilhelmi, Godino y Lasa, 2014), por lo tanto, se requiere un especial cuidado para abordar estas nociones en el contexto de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Es importante distinguir que si los profesores presentan conflictos de significado relacionados a estas nociones, tendrán dificultades para interpretar comportamientos mostrados por sus alumnos en actividades matemáticas relacionadas, así como también, el profesorado tendrá dificultad para diseñar tareas que favorezcan este tipo de conocimiento matemático.

De acuerdo con Hitt (2003), Amaya, Pino-Fan y Medina (2016), se reporta a su vez, que existen dificultades por parte de futuros profesores de matemáticas para realizar transformaciones de las representaciones de una función. Hitt (2003) menciona que las dificultades presentadas tanto por estudiantes como por futuros profesores de matemáticas es que se restringen en la manipulación de expresiones algebraicas y eso produce limitaciones en su comprensión. Los resultados muestran que existen dificultades para identificar y relacionar los elementos de una función en uno o varios registros y que esto puede ser impedimento para el desarrollo del pensamiento variacional, indispensable para el acceso al cálculo (Hitt, 2003, citado en Amaya *et al.*, 2006).

Otro aspecto importante a considerar y que influye en la formación inicial de los futuros profesores de matemáticas para el estudio del cálculo, es lo que se promueve en los diferentes niveles de educación a través de los planes y programas de estudio, pues son varias las observaciones y críticas realizadas sobre lo que éstos proponen a los futuros profesores y profesoras en servicio al desarrollar en las aulas. Ejemplo de ello, es lo que expresa Vasco (2003), enfatizando que falta claridad en los currículos escolares sobre el estudio de la variación, el señalamiento destaca que se ha identificado

que no existe claridad de qué se debe entender por pensamiento variacional. En cambio, sugiere que los currículos deberían centrarse en la manera en cómo varían las magnitudes variables, captando patrones numéricos que se repiten, y no en las figuras estáticas, ni en la definición de función, o en aprenderse las fórmulas para reemplazar valores en ellas, puesto que estas prácticas obstaculizan el desarrollo de un pensamiento variacional.

Además, Panorkou, Maloney y Confrey (2016), Bojórquez, Castillo y Jiménez, (2016) resaltan la existencia de una parcialidad en los currículos de matemáticas sobre la enseñanza de las funciones en el nivel básico, resaltando la presencia del estudio de la función como regla de correspondencia y no como un concepto relacionado con la variación. Finalmente, se hace también una crítica a lo que se promueve en los libros de texto, así pues, Thompson y Carlson (2017) concluyen que el razonamiento covariacional no desempeña ningún papel en los actuales libros de texto de matemáticas de secundaria, es decir, que los textos de secundaria de matemáticas no están formulados desde un punto de vista variacional.

Se puede observar, entonces, que el estudio de la variación está profundamente relacionado con el estudio del cálculo, sin embargo, hay un problema en cuanto a lo que se implementa o desarrolla en planes y programas de estudio alrededor de la variación, así como también existen diversas dificultades en el estudio de temas relacionados a éste, tanto en profesores, futuros profesores de matemáticas como en estudiantes de educación básica. Por lo anterior, es necesario, considerar al abordar en el estudio del cálculo, problemas o actividades que contribuyan al estudio del cálculo de las magnitudes variables, mediante un enfoque dinámico y considerar, los reportes que se han presentado sobre las dificultades existentes por parte de los futuros profesores de matemáticas sobre el estudio de nociones relacionadas al estudio del cálculo.

Es necesario desarrollar y plantear actividades didácticas que retomen el estudio de diversas situaciones que involucren el estudio del cálculo desde un punto de vista dinámico y variacional. También es necesario promover tareas que enriquezcan conocimientos matemáticos, pero que a su vez desarrollen conocimientos y competencias didácticos que son necesarios para que el futuro profesor identifique conflictos que se pueden presentar en los estudiantes durante el estudio del tema y pueda proponer estrategias que ayuden a resolver tales conflictos.

Considerando la gran preocupación y demanda de investigaciones empíricas que reclama la comunidad científica para abordar el desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del futuro profesor de matemáticas (Chapman y An, 2017; Ponte y Chapman, 2006), se esperaría afrontar esta problemática en el contexto de la formación inicial. Según diversas investigaciones (Breda, Font y Pino-Fan, 2018; Godino, Giacomone, Font y Pino-fan, 2018), un futuro profesor debe además de tener conocimientos matemáticos sólidos del nivel en el que enseña, debe poseer otros conocimientos que le posibiliten la enseñanza de este y que considere cómo es que aprenden sus estudiantes.

Además de tener la intención de desarrollar el conocimiento didáctico-matemático en futuros profesores sobre el estudio del cálculo, se tiene que buscar y tener la intención de iniciar a los estudiantes para profesor en el desarrollo de competencias que les permitan analizar prácticas matemáticas de sus estudiantes relacionados al cálculo diferencial, de tal forma que los futuros docentes identifiquen características propias del tema y logren diseñar estrategias, a partir de esos análisis para orientar a sus estudiantes en el estudio del tema. Muchas de las propuestas para poder desarrollar este tipo de competencia en los futuros profesores de matemáticas, es la que se propone en diversos trabajos (Burgos, Beltrán-Pellicer, Giacomone, y Godino, 2018; Burgos, Giacomone y Beltrán-Pellicer, 2018; Giacomone, 2017; 2018) que consiste en la identificación, por parte de los profesores de matemáticas, de los objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas de ellos mismos, pero también de sus posibles estudiantes.

Este tipo de tareas es considerado (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017; Giacomone, Godino, Wihelmi, Blanco, 2018; Pino-Fan, Font y Godino, 2015) como una competencia didáctico-matemática, que permitirá a los futuros docentes comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar procesos de institucionalización y evaluar las competencias matemáticas de sus alumnos, por lo tanto, es útil y necesario, incluir este tipo de tareas en las actividades didácticas destinadas al estudio del cálculo, porque es necesario que los futuros profesores reflexionen sobre su propia práctica y la práctica de otros, y necesita ser consciente de los contenidos matemáticos, didáctico – matemáticos y de la competencia que necesita desarrollar en las aulas de clases al abordar este contenido.

Características

Este curso está ubicado en el tercer lugar de la malla curricular, correspondiente al sexto semestre del Plan de Estudios de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, para trabajarse cuatro horas a la semana con 4.5 créditos, teniendo en la mira la formación de docentes de Matemáticas de educación obligatoria; pertenece al trayecto formativo Formación para la enseñanza y el aprendizaje, al igual que los cursos *Historia y filosofía de las Matemáticas*, y *Trabajo multidisciplinar con la Física*, con quienes guarda relación disciplinar y didáctica. Asimismo, se cursa de manera simultánea con *Fundamentos de la educación y Pensamiento pedagógico* del Trayecto formativo Bases Teórico-Metodológicas para la Enseñanza. Otras asignaturas del sexto semestre son: *Inglés. Convertirse en comunicadores independientes*, del trayecto formativo segunda lengua; y *Proyectos de intervención docente*, del Trayecto formativo Práctica profesional, con el que también se relaciona estrechamente.

Este curso da cuenta de la naturaleza de las matemáticas como una herramienta que permite resolver problemas planteados en diversas esferas del quehacer humano, en particular en problemas donde se requiere la maximización o la minimización de procesos que se pueden modelar mediante funciones. Esto es importante que sea reconocido en la formación inicial de los futuros docentes de matemáticas, pues dota a las matemáticas escolares de sentido, en particular de un carácter interdisciplinario. Además le confiere el valor de ser una ciencia viva, susceptible de ser construida por las y los estudiantes en las aulas.

El abordaje del cálculo diferencial favorece la innovación en la enseñanza, pues se han elaborado materiales con soporte tecnológico que brindan diversas posibilidades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Esto es posible gracias a un currículo con un enfoque basado en competencias, aunado al carácter holístico e integrador de las matemáticas, a un enfoque centrado en el aprendizaje y al modelo curricular flexible.

Si bien el Cálculo diferencial no forma parte de las asignaturas de la educación básica, sí permite al futuro docente tener una mirada amplia de lo que requieren los estudiantes para completar el ciclo de la educación obligatoria.

Cursos con los que se relaciona

El enfoque holista propuesto para esta licenciatura favorece una vinculación entre los contenidos de este curso con otros cursos de la licenciatura. A continuación, se muestran los cursos cuyos contenidos o propuestas se vinculan.

Los cursos del Trayecto formativo: Formación para la enseñanza y el aprendizaje brindan herramientas matemáticas básicas -aritméticas, algebraicas y probabilísticas, entre otras-, que al imbricarse, organizarse y axiomatizarse ofrecen diversidad de ideas, sentidos y representaciones de

objetos y relaciones matemáticas como, por ejemplo, diversos tipos de variables, funciones y ecuaciones que contribuyen a modelar y solucionar fenómenos y situaciones problemáticas, e integran la necesidad de abordajes económicos y eficaces mediante algoritmos. El cálculo diferencial es una de las asignaturas donde se precisa tener dominio de la relación entre los conocimientos de conceptos matemáticos de esas asignaturas, principalmente del álgebra.

En particular, los contenidos de los tres espacios curriculares que se ofrecen este semestre se vinculan fuertemente entre sí. El curso *Trabajo multidisciplinar con la física* brinda situaciones en las que se aplican las razones de cambio, particularmente aquellas donde el incremento en el denominador tiende a cero. Y en el curso *Historia y filosofía de las matemáticas*, se abordará el momento en el que se requiere el uso de infinitesimales como un momento de ruptura epistemológica.

Todos los cursos del Trayecto formativo: Práctica profesional se ven beneficiados con este curso. Se espera que la innovación que se derive de las experiencias de este curso, ayude a vislumbrar al estudiantado la importancia del diseño de secuencias de actividades con materiales y soportes tecnológicos.

También se vincula directamente con los cursos del Trayecto formativo: Optativos, en sus especialidades de Tecnología educativa, Educación financiera, Investigación en Didáctica de las Matemáticas y Matemáticas Superiores.

Sugerencias o recomendaciones generales a atender

Se considera fundamental que el profesorado pueda explorar el dominio de los conocimientos previos de la comunidad estudiantil, así como su nivel de desarrollo de habilidades matemáticas. Esto con la finalidad de que pueda organizar los contenidos del programa en forma gradual y sistemática a partir de las características propias del grupo con el que va a trabajar.

Rivera (2014) refiere que el estudio de los números reales, con el que inicia todo tratado de fundamentos del cálculo, es la herencia que legó Dedekind quien se percató de que todas las pruebas de los principales resultados del cálculo se basaban en las propiedades de los números reales, aunque concebidas en un contexto geométrico, sobre todo la que se refiere a la continuidad.

El autor ejemplifica el caso de que toda sucesión de reales que crece permanentemente y que no sobrepasa algún número, por necesidad siempre tiene un límite y enfatiza que esta es una aseveración que se sustenta en la evidencia geométrica o bien, en la representación de los reales en la recta y en su incuestionable continuidad.

En suma, el estudio de los números reales debe permitir al estudiantado normalista que adquiera destrezas en el manejo de los números reales; por ejemplo, con las propiedades algebraicas, las desigualdades y los procesos de racionalización. También es fundamental la comprensión de lo que significan las representaciones decimales periódicas y no periódicas, así como el conocimiento de las diferentes clases de números reales y cómo se caracterizan por sus expansiones decimales (Rivera, 2014).

Respecto al tema de funciones, su graficación y sus operaciones, es importante que se pueda considerar que el concepto de proporcionalidad es fundamental para el desarrollo de un pensamiento variacional. Lo anterior sin dejar de lado la continuidad de una función tomando como base el estudio de los racionales sin un tratamiento axiomático ni basado en demostraciones rigurosas.

De igual manera, el estudio de los números reales y en particular, de los racionales implica a la razón como una de las formas de representar al subconjunto de los números racionales con objeto de

diferenciarlo de la fracción, pues ambos tienen significados distintos y es importante, utilizarlos de forma pertinente.

En el caso de límites y continuidad, conviene señalar que el curso debe mantener su orientación sobre la resolución de problemas en distintos contextos y situaciones, lo cual implica el dominio de contenidos matemáticos como la factorización y el uso de propiedades de la igualdad, por lo que estos últimos también serán de gran importancia en la organización del curso por parte del profesorado.

Sería deseable para la comprensión del concepto de límite que al resolver problemas, los estudiantes tuvieran cierto nivel de desarrollo sobre la habilidad matemática de la estimación y en particular, la idea de aproximación, ya sea por truncamiento o por redondeo de cantidades al realizar operaciones básicas.

Con base en lo anterior, se sugiere continuar con la elaboración de una tabla y trazar la gráfica para que los estudiantes puedan identificar los valores a los que se aproxima la variable dependiente a partir de los valores proporcionados a la variable independiente (Santaló y Carbonell, 2002).

De esta manera, se brindan elementos básicos para la conceptualización del límite lateral, ya sea por izquierda o por derecha y a su vez, se pueda dar significado al cálculo algebraico de un límite infinitesimal o un límite indeterminado.

Aquí es sumamente importante que el estudio del Cálculo permita al estudiantado normalista dar significado a las reglas propias de la derivación, la derivada de funciones compuestas (regla de la cadena), la derivación de funciones inversas y las derivadas sucesivas.

Las reglas citadas se aplican a las funciones elementales, las cuales permiten obtener, en particular, las derivadas de las funciones polinomiales, racionales, algebraicas, exponenciales, logarítmicas, las seis funciones trigonométricas y sus funciones inversas, las cuales constituyen las seis funciones arco (Rivera, 2014).

Las aplicaciones de la derivación implican el reconocimiento de máximos y mínimos relacionados con problemas de optimización con cálculo, por lo que el profesorado deberá cerciorarse de que la comunidad estudiantil pueda tener dominio de saberes previos relacionados con el planteamiento y resolución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas e incluso, en su relación con las ecuaciones cuadráticas.

Este curso fue elaborado por docentes normalistas, personas especialistas en la materia y en el diseño curricular provenientes de las siguientes instituciones: Carlos Bosch Giral del Instituto Tecnológico Autónomo de México e integrante de la Academia Mexicana de la Ciencia; Alejandra Ávalos Rogel de la Escuela Normal Superior de México; Vitaliano Acevedo Silva de la Escuela Normal Superior de México; Saúl Elizarrarás Baena de la Escuela Normal Superior de México; Mario Alberto Quiñonez Ayala de la Escuela Normal Superior de Hermosillo; Karina Jaqueline Herrera García de la Escuela Normal Superior de Hermosillo; Emma Luz Velasco Zamora Instituto Superior de Educación Normal del Estado de Colima; Carlos Alberto López Delgado de la Escuela Normal Superior "Moises Saenz Garza", Carlos César Cruz Arizmendi del Centro de Actualización del Magisterio de Acapulco y Gerardo Gabriel García Castejón del Centro de Actualización del Magisterio de Acapulco.

Especialistas en diseño curricular: Julio César Leyva Ruiz, Gladys Añorve Añorve, Sandra Elizabeth Jaime Martínez, María del Pilar González Islas de la Dirección General de Educación Superior para el Magisterio.

Competencias del perfil de egreso a las que contribuye el curso

Competencias genéricas

- Soluciona problemas y toma decisiones utilizando su pensamiento crítico y creativo.
- Aprende de manera autónoma y muestra iniciativa para autorregularse y fortalecer su desarrollo personal.
- Colabora con diversos actores para generar proyectos innovadores de impacto social y educativo.
- Utiliza las tecnologías de la información y la comunicación de manera crítica.
- Aplica sus habilidades lingüísticas y comunicativas en diversos contextos.

Competencias profesionales

Utiliza conocimientos de las Matemáticas y su didáctica para hacer transposiciones de acuerdo con las características y contextos de los estudiantes a fin de abordar los contenidos curriculares de los planes y programas de estudio vigentes.

- Identifica marcos teóricos y epistemológicos de las Matemáticas, sus avances y enfoques didácticos para la enseñanza y el aprendizaje
- Articula el conocimiento de las Matemáticas y su didáctica para conformar marcos explicativos y de intervención eficaces
- Utiliza los elementos teórico-metodológicos de la investigación como parte de su formación permanente en las Matemáticas
- Relaciona sus conocimientos de las matemáticas con los contenidos de otras disciplinas desde una visión integradora para propiciar el aprendizaje de sus estudiantes

Diseña los procesos de enseñanza y aprendizaje de acuerdo con los enfoques vigentes de las Matemáticas, considerando el contexto y las características de los estudiantes para lograr aprendizajes significativos.

- Propone situaciones de aprendizaje de las Matemáticas, considerando los enfoques del plan y programa vigentes; así como los diversos contextos de los estudiantes
- Relaciona los contenidos de las matemáticas con las demás disciplinas del plan de estudios vigente

Evalúa los procesos de enseñanza y aprendizaje desde un enfoque formativo para analizar su práctica profesional.

- Diseña y utiliza diferentes instrumentos, estrategias y recursos para evaluar los aprendizajes y desempeños de los estudiantes considerando el tipo de saberes de las Matemáticas
- Reflexiona sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, y los resultados de la evaluación, para hacer propuestas que mejoren su propia práctica

Gestiona ambientes de aprendizaje colaborativos e inclusivos para propiciar el desarrollo integral de los estudiantes.

- Utiliza información del contexto en el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje incluyentes
- Promueve relaciones interpersonales que favorezcan convivencias interculturales

Utiliza la innovación como parte de su práctica docente para el desarrollo de competencias de los estudiantes.

- Implementa la innovación para promover el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes
- Diseña y/o emplea objetos de aprendizaje, recursos, medios didácticos y tecnológicos en la generación de aprendizajes de las Matemáticas
- Utiliza las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC), y Tecnologías del Empoderamiento y la Participación (TEP) como herramientas de construcción para favorecer la significatividad de los procesos de enseñanza y aprendizaje

Competencias disciplinares

Construye argumentos para diseñar y validar conjeturas en todas las áreas de las matemáticas en diferentes situaciones

- Analiza distintas situaciones que lleven a diseñar una conjetura

Articula las distintas ramas de las Matemáticas incorporando otras disciplinas para facilitar el análisis de una situación modelada

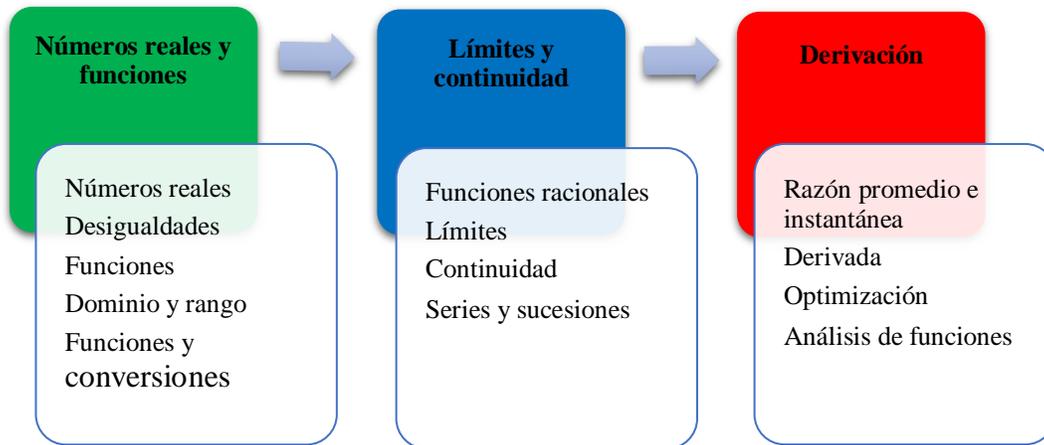
- Construye relaciones entre la geometría y el álgebra, el álgebra y la estadística, la aritmética y la probabilidad, entre otras
- Utiliza herramientas tecnológicas para analizar y modelar situaciones

Establece relaciones funcionales algebraicas y trascendentes entre variables, para modelar y resolver problemas que impliquen máximos y mínimos.

- Recurre a la generalización y a la variación funcional para resolver problemas
- Modela problemas en los que interviene la razón de cambio y el límite de una función

Estructura del curso

- Números reales y funciones
 - Números reales
 - Desigualdades
 - Funciones
 - Dominio y rango
 - Funciones y conversiones
 - Rectas
 - Parábolas
 - Cúbicas
 - Trigonométricas
 - Exponenciales
 - Hipérbolas
 - Logarítmicas
- Límites y continuidad
 - Funciones racionales
 - Límite
 - Continuidad y tipos de discontinuidades
 - Series y sucesiones
- Derivación
 - Razón promedio e instantánea de cambio
 - Derivada
 - Optimización
 - Criterio de la primera derivada
 - Criterio de la segunda derivada
 - Análisis de funciones y características



Orientaciones para el aprendizaje y enseñanza

Las actividades de aprendizaje que proponga el docente deberán promover el trabajo autónomo al resolver problemas, por lo que se les solicita que se reúnan en equipos de trabajo para que desde ese espacio puedan comunicarse y de forma simultánea desarrollen el pensamiento crítico y reflexivo.

García y Dolores (2016) definen a una Situación de Aprendizaje (SA), como el espacio de encuentro en el que los participantes (profesor y alumnos), coordinan acciones a través de un proceso de interpretación/compreensión mediante el cual logran construir significados que comparten. En este caso, pretendieron mejorar la comprensión del concepto de derivada con estudiantes principiantes universitarios de la Universidad Autónoma de Guerrero, lo cual habían planteado como problema a resolver.

De acuerdo con los resultados reportados por los autores, los alumnos que lograron mejorar su comprensión fueron aquellos que estuvieron en todas las clases e intervinieron constantemente, es decir, discutieron constantemente con sus compañeros y realizaron todas las tareas encomendadas.

Cabe señalar que uno de los elementos teóricos que incorporaron fueron los registros semióticos de la información propuestos por Duval (1998), a saber: el numérico, el geométrico, el algebraico y el verbal.

Los procesos de modelación complejos del pensamiento matemático estructuran los fenómenos de estudio al observar e identificar los cambios y variaciones, como crecimiento, velocidad, aceleración, éstos tienen bases conceptuales en el cálculo diferencial, logrando descubrir cómo se imbrica la función propuesta, como base para el modelo matemático, con su primera derivada.

Por otra parte, el cálculo diferencial es una muestra específica de los alcances, dimensiones y afectaciones que pueden ocurrir en los modelos y sus objetos procesuales de estudio. La primera derivada está relacionada con los modelos lineales, que ya han sido estudiados en otras asignaturas del Plan de estudios, por lo que será una forma interesante de recuperar saberes previos del estudiantado normalista.

Finalmente, en este curso se propone hacer énfasis en el aspecto tecnológico que está asociado fuertemente con conocimientos y habilidades en el área de ingeniería, que es la de más reciente incorporación en la propuesta del modelo STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics). Glancy y Moore (2013, cit. in Rojas y Segura, 2019, p. 13) reconocen que la educación en STEM exponencia el aprendizaje cuando se considera "... el razonamiento lógico, causal y deductivo en las matemáticas, el diseño y optimización de procesos en ingeniería, la indagación en ciencias, así como el pensamiento computacional en los campos de la tecnología".

El enfoque de STEM implica la inclusión de prácticas y proyectos que recurren a la ciencia, la tecnología, la ingeniería, las artes y las matemáticas de manera interdisciplinaria, transdisciplinaria e integrada, que tienen en el centro problemas no triviales y complejos, y que requiere de habilidades como el pensamiento creativo, el trabajo colaborativo, el pensamiento crítico, la comunicación efectiva; actitudes como la proclividad a la innovación, el desarrollo sostenible y el bienestar social; y valores como la democracia, la inclusión, el respeto a la diversidad natural y social, y por la dignidad humana.

Sugerencias de evaluación

La evaluación es un proceso permanente que permite valorar gradualmente la manera en que cada estudiante moviliza sus conocimientos, pone en juego sus destrezas y desarrolla nuevas actitudes utilizando los contenidos conceptuales y procedimentales que el curso propone.

Este apartado brinda algunas sugerencias a considerar sobre los aprendizajes a lograr y a demostrar en cada una de las unidades del curso, así como su integración final. De este modo se propicia la elaboración de evidencias parciales para las unidades de aprendizaje y una evidencia final para la evaluación del curso.

Con relación a la acreditación de este curso, se retoman las Normas de control Escolar aprobadas para los planes 2018, que en su punto 5.3, inciso (e) menciona “La acreditación de cada unidad de aprendizaje será condición para que el estudiante tenga derecho a la evaluación global” y en su inciso (f); se especifica que “la evaluación global del curso ponderará las calificaciones de las unidades de aprendizaje que lo conforman, y su valoración no podrá ser mayor del 50%. La evidencia final tendrá asignado el 50% restante a fin de completar el 100%.” (SEP, 2019, pág. 16).

Las sugerencias de evaluación, como se propone en el plan de estudios, consisten en un proceso de recolección de evidencias sobre un desempeño competente del estudiante con la intención de construir y emitir juicios de valor a partir de su comparación con un marco de referencia constituido por las competencias, sus unidades o elementos y los criterios de evaluación; al igual que en la identificación de aquellas áreas que requieren ser fortalecidas para alcanzar el nivel de desarrollo esperado en cada uno de los cursos del Plan de Estudios y en consecuencia en el perfil de egreso.

De ahí que las evidencias de aprendizaje se constituyan no sólo en el producto tangible del trabajo que se realiza, sino particularmente en el logro de una competencia que articula sus tres esferas: conocimientos, destrezas y actitudes.

Para la elaboración de las evidencias, es necesario reconocer la complejidad del proceso de aprendizaje, por lo que éste puede requerir una serie de productos previos que permitan retroalimentar y orientar a cada estudiante, de acuerdo a su propio ritmo de aprendizaje. El docente podrá elegir aquellos que son procesuales y permiten la retroalimentación, a diferencia de aquellos que permiten evidenciar el aprendizaje, para decidir si los considera como objeto de evaluación.

A continuación, se presentan algunas sugerencias de evidencias para evaluar los aprendizajes de este curso:

Infografía con las características de una función algebraica y trascendente, con sus diversas representaciones	15%
Infografía con los diversos casos de límites de funciones y su relación con la continuidad y con la convergencia	15%
Infografía con diversas interpretaciones de la derivada como modelo matemático en la resolución de problemas	20%
Proyecto integrador: Documento que de cuenta de la reflexión sobre la enseñanza y aprendizaje de las funciones, los límites y la derivada a partir de la teoría de representaciones semióticas (Duval, 1998), para lo cual, cada unidad de aprendizaje aportará elementos de reflexión, análisis y argumentación	50%

Unidad de aprendizaje I. Números reales y funciones

En esta primera unidad, se debe considerar que la composición de los números reales incluyen a la definición de los números racionales cuya esencia permitirá el reconocimiento de que el cero dividido entre cualquier número $0/x = 0$ siempre será cero siempre que se cumpla que $0 = 0 \cdot x$, en cambio, cualquier número dividido entre cero no tiene cabida en la definición de racional y menos aún el cero dividido entre cero.

Propósito de la unidad de aprendizaje

Resuelve problemas relacionados con las ciencias naturales, las ciencias sociales y las humanidades, que impliquen el uso de funciones, a partir de la interpretación de fenómenos y sus relaciones, identificando los diferentes tipos de funciones, así como el rango y dominio de éstas; a fin de reflexionar sobre los procesos de enseñanza – aprendizaje para llevarlos a la práctica docente, con o sin tecnología.

Contenidos

- Números reales
- Desigualdades
- Funciones
- Dominio y rango
- Funciones y conversiones
 - Rectas
 - Parábolas
 - Cúbicas
 - Trigonométricas
 - Exponenciales
 - Hipérbolas
 - Logarítmicas

Actividades de aprendizaje

A continuación, se presentan algunas sugerencias de actividades para desarrollar las competencias, no obstante, cada docente está en la libertad de modificar, sustituir o adaptarlas al contexto y necesidades de su grupo.

Se propone que el estudiantado realice algunas actividades propuestas de manera asincrónica, sobre todo las de búsqueda y sistematización de información, y que utilice los momentos de comunicación sincrónica, o los foros virtuales, para socializar los resultados.

Generales

El personal docente recupera los saberes previos del tema. Algunos estudiantes vieron los temas que se abordan en esta unidad en el bachillerato. Un buen apoyo puede ser la organización de la actividad autónoma en la plataforma Khan Academy.

El estudiantado elabora una lista de sitios web de información confiable, bajo la dirección del personal docente.

El profesorado organiza, junto con el estudiantado, la información en organizadores gráficos, infogramas o fichas de trabajo, para el aprendizaje de conceptos y procedimientos, para facilitar su consulta.

Hacer lecturas de textos en inglés sobre el tema.

Desde esta primera unidad se recuperarán situaciones de la vida cotidiana donde es susceptible utilizar las Matemáticas. Estas situaciones pueden ser integradas en la recopilación de secuencias didácticas que se utilizan en otras asignaturas de este semestre.

Conforme avanza el curso el docente recuperará las discusiones para la elaboración del proyecto integrador.

Específicas

Se sugiere arrancar cada sesión con problemas que lleven a los estudiantes a obtener los modelos matemáticos subyacentes, y posteriormente hacer la reflexión matemática de las características de los modelos matemáticos obtenidos.

1. Para conocer el volumen de agua que tiene un tinaco con forma de cilindro circular recto, con un radio de 50 centímetros, basta con medir la altura a la que llega el agua.

$$V(h) = \pi(50)^2 h$$

2. Para convertir de grados centígrados a grados Fahrenheit utilizamos la fórmula:

$$F(C) = \frac{9}{5}C + 32$$

3. Un fabricante de mochilas tiene gastos fijos mensuales de \$2 580. El costo directo de fabricar cada mochila es de \$40. Para calcular el costo de producir x mochilas en un mes, usamos la función

$$C(x) = 2580 + 40x$$

4. Las longitudes de los huesos están relacionadas con la estatura y el sexo de la persona. En particular tenemos:

	Mujer	Hombre
Fémur	$F(e) = \frac{e - 72.85}{1.95}$	$G(e) = \frac{e - 81.31}{1.88}$

donde e es la estatura de la persona medida en centímetros.

Tomado de De Oteyza et al. (2013, p. 60)

De manera individual y grupal exploran el concepto de función, mediante la relación entre variables que explican situaciones.

Reflexionan sobre lo siguiente: ¿La división entre cero está definida?, ¿qué notaciones existen para las funciones?, ¿qué es una indeterminación?

De manera individual y grupal exploran el concepto de desigualdad, mediante el estudio y tratamiento de modelos explican situaciones (algebraico y gráfico). Recuperan temas vistos con anterioridad, como los productos notables y su factorización, leyes de potencias de la misma base, la potencia de potencia. La radicación y exponente negativo.

Analizar y elaborar gráficas de diferentes fenómenos, como el crecimiento de bacterias, el movimiento de cuerpos, etc. y analizar sus características. Crecimiento y decrecimiento, pendiente y ángulo de inclinación de tangentes, etc.

Construcción colectiva de definiciones de dominio y rango, y promover reflexiones sobre su relevancia.

Se sugiere hacer búsquedas en Geogebra para analizar simuladores de funciones trascendentes, que permitan identificar algunas características.

Avance del proyecto integrador

Para el proyecto integrador, en esta unidad se organizarán en grupos pequeños para fundamentar, mediante videos explicativos, la reflexión de los procesos de enseñanza y aprendizaje del estudio de funciones.

Evidencias de la unidad	Criterios de evaluación
<p>Para la elaboración de las evidencias, es necesario reconocer la complejidad del proceso de aprendizaje, por lo que éste puede requerir una serie de productos previos que permitan retroalimentar y orientar a cada estudiante, de acuerdo a su propio ritmo de aprendizaje.</p> <p>El docente podrá elegir aquellos que son procesuales y permiten la retroalimentación, a diferencia de aquellos que permiten evidenciar el aprendizaje, para decidir si los considera como objeto de evaluación.</p> <p>Se sugiere la siguiente evidencia de aprendizaje:</p> <p>Infografía con las características de una función algebraica y trascendente, con sus diversas representaciones</p> <p>También se espera la construcción de evidencias que coadyuven a un proyecto integrador:</p> <p>Videos explicativos en donde se reflexione y argumente sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje del estudio de funciones.</p>	<p>Para esta unidad se proponen dos criterios de evaluación de competencias, y más abajo los indicadores de cada uno de los aspectos que las conforman:</p> <p>-Reconoce que las funciones en tanto modelos matemáticos, son formas de explicar y representar la realidad.</p> <p>-Reflexiona sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje en el estudio de funciones.</p> <p>Conocimientos</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Representa los conjuntos numéricos, sus operaciones matemáticas, sus bases conceptuales y axiomáticas. ● Identifica y define tipos de funciones. ● Define conceptos y reconoce representaciones y el tránsito entre ellas. ● Identifica problemas que favorecen la modelación de diferentes tipos de funciones. ● Identifica las dificultades asociadas al contenido matemático, en la construcción del conocimiento matemático. <p>Habilidades</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Utiliza algoritmos asociados a las representaciones y tratamiento de la información ● Lee y reconoce en diversas representaciones de funciones el dominio y el rango ● Analiza los resultados de aprendizajes y desempeños en las matemáticas, reportados en distintos estudios ● Describe los retos que implica la enseñanza y aprendizaje de las funciones ● Propone aspectos innovadores para la enseñanza y aprendizaje de las funciones ● Identifica situaciones y ambientes de aprendizaje innovadores para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ● Expresa claramente sus ideas y argumentos de forma oral y escrita en distintos contextos ● Elabora un guion para la grabación de su video

Evidencias de la unidad	Criterios de evaluación
	<ul style="list-style-type: none"> ● Utiliza recursos digitales diversificados para la elaboración de su video ● Utiliza las TIC, TAC y TEP en su proceso de aprendizaje y en su práctica docente <p>Actitudes</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Muestra autonomía en su proceso de aprendizaje. ● Integra la diversidad cultural en su práctica cotidiana. ● Escucha las conjeturas y argumentos de sus pares para resolver problemas profesionales. ● Muestra disposición a la autorregulación de su propio aprendizaje. ● Muestra perseverancia para concluir con las tareas y actividades. ● Colabora con distintos actores, en la propia escuela normal, y con otras instituciones de educación superior, para desarrollar proyectos y generar propuestas innovadoras acordes a la diversidad de sus estudiantes. <p>Valores</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Reconoce la inclusión como un valor en la sociedad. ● Respeto las opiniones, las estrategias de resolución de problemas y los razonamientos de docentes, pares y estudiantes. ● Valora la docencia como una profesión con fundamentos teóricos y metodológicos. ● Muestra honestidad al citar las ideas y trabajos de pares, docentes y autores. ● Soluciona problemas utilizando su pensamiento crítico. <p>Ponderación de acuerdo a las normas de control escolar: Se sugiere que la evidencia de esta unidad equivalga al 15% de la calificación total.</p>

A continuación, se presenta un conjunto de textos de los cuales el profesorado podrá elegir aquellos que sean de mayor utilidad, o bien, a los cuales tenga acceso, pudiendo sustituirlos por textos más actuales.

Bibliografía básica

- Acevedo, V. (2013). *Cálculo diferencial e Integral paso a paso*, Madrid: Palibrio.
- Apostol, T. M. (1984). *Calculus. Volumen 1. Calculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. México: Reverté.
- De Oteyza, E.; Lam, E., Fernández, C. & Carrillo, A. (2013). *Cálculo diferencial e integral*. México: Pearson.
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking. The register of semiotic representation*. New York: Springer.
- Granville, W. A. (2009). *Cálculo diferencial e integral*. México: Limusa.
- Perez, J. (2006). *Cálculo diferencial e integral*. Granada: Universidad de Granada
- Piskunov, N. (1977). *Cálculo Diferencial e Integral, tomo 1*. Moscú: edit. Mir.
- Purcell, E. J. Varberg, H. & Rigdon, S. E. (2007). *Cálculo diferencial e integral*. México: Pearson.
- Stewart, J.; Redlin, L. & Watson. S. (2007). *Precálculo. Matemáticas para el Cálculo*. México: Cengage Learning.
- Thomas, G. (2006). *Cálculo de una variable*. México: Pearson-Addison Wesley.

Bibliografía complementaria

- Ayres, F. (1971). *Cálculo diferencial e integral*. México: Mc Graw-Hill.
- Colegio Nacional de Matemáticas (2008). *Matemáticas Simplificadas*. México: Pearson.
- Colera, J., García, R. & Oliveira, J. M. (2002). *Ejercicios de Matemáticas I. Geometría Analítica plana*. Madrid: Anaya.
- Fuller, G. (1997). *Geometría Analítica*. México: Editorial Continental.
- Lehmann, C. H. (1993). *Geometría Analítica*. México: Limusa/Noriega Editores.
- Leithold, L. (1982). *Cálculo con geometría analítica*. México: Harla.
- Leithold, L. (1998). *Ejercicios resueltos de cálculo con geometría analítica*, cuarta edición, México: Prentice Hall.
- Swokowski, E. y Jeffery, A. (2011) *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Cengage Learning Editores.
- Zill, D. G. (1997). *Cálculo con geometría analítica*. México: edit. Iberoamericana.

Recursos de apoyo

Videos

<https://www.youtube.com/watch?v=SHstJZN-yOQ>

Sitios web

Recursos geogebra:

<https://www.geogebra.org/m/eE6QXFpE>

https://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/%5BPurcell,Varberg,Rigdon%5DCalculo/%5BPurcell,Varberg,Rigdon%5DCalculo.pdf

<https://librosysolucionarios.org/calculo-diferencial-e-integral/>

<https://www.conocimientosfundamentales.unam.mx/matematicas/calculo/pdfs/interior.pdf>

<https://es.search.yahoo.com/search?fr=mcafee&type=E210ES0G0&p=problemas+resueltos+d+e+calculo+infinitesimal>

<https://www.tebarflores.com/matematicas/201-problemas-de-calculo-infinitesimal.html>

https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/CalculoDiferencial_Integral/CALCULO_D_I_ELSIE.pdf

<http://www3.udg.edu/ice/www/uni/EEES/Alacant/Modalidad1/m1t24.pdf>

<https://acelerandolaciencia.wordpress.com/2014/01/12/newton-leibniz-y-el-calculo-infinitesimal/>

<http://adria.inaoep.mx/~diplomados/biblio/calculo/librodeUAM/ProblemasResueltos.pdf>

Unidad de aprendizaje II. Límites y continuidad

Es deseable que el estudio de los límites se inicie de manera intuitiva mediante la elaboración de tablas y el trazado de gráficas que permitan su tratamiento intuitivo previo a su estudio formal. En este sentido, también se hace indispensable el reconocimiento de las características y propiedades de los números enteros, debido a que el cálculo de límites también implica el concepto de infinito.

Propósito de la unidad de aprendizaje

Deduca el concepto de continuidad y discontinuidad, a partir de la resolución de problemas que impliquen el uso límites de una función y la identificación de las propiedades de éstos; evidenciando una actitud proactiva y de colaboración, al considerar diferentes ambientes de aprendizaje.

Contenidos

- Funciones racionales
- Límite
- Continuidad y tipos de discontinuidades
- Series y sucesiones

Actividades de aprendizaje

A continuación, se presentan algunas sugerencias de actividades para desarrollar las competencias, no obstante, cada docente está en la libertad de modificar, sustituir o adaptarlas al contexto y necesidades de su grupo.

Se propone que el estudiantado realice algunas actividades propuestas de manera asincrónica, sobre todo las de búsqueda y sistematización de información, y que utilice los momentos de comunicación sincrónica, o los foros virtuales, para socializar los resultados.

Generales

El personal docente recupera los saberes previos del tema. Algunos estudiantes vieron los temas que se abordan en esta unidad en el bachillerato. Un buen apoyo puede ser la organización de la actividad autónoma en la plataforma Khan Academy, en la asignatura de Física.

El estudiantado elabora una lista de sitios web de información confiable, bajo la dirección del personal docente.

El profesorado organiza, junto con el estudiantado, la información en organizadores gráficos, infogramas o fichas de trabajo, para el aprendizaje de conceptos y procedimientos, para facilitar su consulta.

Hacer lecturas de textos en inglés sobre el tema.

En cada una de las sesiones se recuperarán situaciones de la vida cotidiana donde es susceptible utilizar las Matemáticas. Estas situaciones pueden ser integradas en la recopilación de secuencias didácticas que se utilizan en otras asignaturas de este semestre.

Conforme avanza el curso el docente recuperará las discusiones para la elaboración del proyecto integrador.

Específicas

Se recuperan problemas en los que se introducen razones –velocidad, flujo, etc.- que involucran intervalos que tienden a cero, como por ejemplo, la velocidad instantánea:

$$v_{inst} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

A partir de un concepto intuitivo de límite, los estudiantes lo conceptualizarán de manera formal.

Desde diversas representaciones, y en el marco de problemas, se planteará la discusión sobre la relación entre límites y continuidad.

El estudiantado abordará teoremas de límites

Revisarán diversos casos de límites, particularmente cuando el límite tiende hacia el infinito ∞ .

Avance del proyecto integrador

Para el proyecto integrador, en esta unidad de aprendizaje se sugiere diseñar una actividad para la enseñanza y aprendizaje de límite y continuidad de una variable real. Se sugiere incluir una reflexión sobre los retos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este tema en la educación obligatoria.

Evidencias de la unidad	Criterios de evaluación
<p>Para la elaboración de las evidencias, es necesario reconocer la complejidad del proceso de aprendizaje, por lo que éste puede requerir una serie de productos previos que permitan retroalimentar y orientar a cada estudiante, de acuerdo a su propio ritmo de aprendizaje.</p> <p>El docente podrá elegir aquellos que son procesuales y permiten la retroalimentación, a diferencia de aquellos que permiten evidenciar el aprendizaje, para decidir si los considera como objeto de evaluación.</p> <p>Se sugiere la siguiente evidencia de aprendizaje:</p> <p>Infografía con los diversos casos de límites de funciones y su relación con la continuidad y con la convergencia.</p> <p>Contribución al proyecto integrador</p> <p>Diseño de una actividad para la enseñanza y aprendizaje de límite y continuidad de una variable real. Incluye una reflexión sobre los retos en la enseñanza y aprendizaje de este tema en la educación obligatoria.</p>	<p>Para esta unidad se proponen dos criterios de evaluación de competencias, y más abajo los indicadores de cada uno de los aspectos que las conforman:</p> <p>-Reconoce que los límites en tanto modelos matemáticos, son formas de explicar y representar la variabilidad de la realidad, particularmente fenómenos que se representan mediante series convergentes y divergentes.</p> <p>-Diseña una actividad para la enseñanza y aprendizaje de límite y continuidad de una variable real.</p> <p>Conocimientos</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Define conceptos y caracteriza tipos de límites, enuncia y demuestra teoremas asociados a ellos ● Define conceptos y caracteriza funciones continuas y discontinuas desde la idea de límite ● Identifica problemas de series y sucesiones <p>Habilidades</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Utiliza la noción de límite como un modelo que permite resolver problemas ● Integra conceptos físicos, matemáticos y tecnológicos ● Utiliza la innovación para el diseño de una actividad para la enseñanza y aprendizaje de límite y continuidad ● Describe los retos que implica la enseñanza y aprendizaje de límite y continuidad en la educación básica ● Favorece los procesos de aprendizaje de las matemáticas mediante estrategias innovadoras ● Identifica situaciones y ambientes de aprendizaje innovadores para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ● Expresa claramente sus ideas y argumentos de forma oral y escrita en distintos contextos ● Utiliza las TIC, TAC y TEP en su proceso de aprendizaje y en su práctica docente

Evidencias de la unidad	Criterios de evaluación
	<p>Actitudes</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Muestra autonomía en su proceso de aprendizaje ● Integra la diversidad cultural en su práctica cotidiana. ● Escucha las conjeturas y argumentos de sus pares para resolver problemas profesionales ● Muestra disposición a la autorregulación de su propio aprendizaje ● Muestra perseverancia para concluir con las tareas y actividades ● Colabora con distintos actores, en la propia escuela normal, y con otras instituciones de educación superior, para desarrollar proyectos y generar propuestas innovadoras acordes a la diversidad de sus estudiantes <p>Valores</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Reconoce la inclusión como un valor en la sociedad ● Respeto las opiniones, las estrategias de resolución de problemas y los razonamientos de docentes, pares y estudiantes ● Valora la docencia como una profesión con fundamentos teóricos y metodológicos ● Muestra honestidad al citar las ideas y trabajos de pares, docentes y autores ● Soluciona problemas utilizando su pensamiento crítico <p>Ponderación de acuerdo a las normas de control escolar: Se sugiere que la evidencia de esta unidad equivalga al 15% de la calificación total.</p>

A continuación, se presenta un conjunto de textos de los cuales el profesorado podrá elegir aquellos que sean de mayor utilidad, o bien, a los cuales tenga acceso, pudiendo sustituirlos por textos más actuales.

Bibliografía básica

- Acevedo, V. (2013). *Cálculo diferencial e Integral paso a paso*, Madrid: Palibrio.
- Apostol, T. M. (1984). *Calculus. Volumen 1. Calculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. México: Reverté.
- De Oteyza, E.; Lam, E., Fernández, C. & Carrillo, A. (2013). *Cálculo diferencial e integral*. México: Pearson.
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking. The register of semiotic representation*. New York: Springer.
- Granville, W. A. (2009). *Cálculo diferencial e integral*. México: Limusa.
- Pérez, J. (2006). *Cálculo diferencial e integral*. Granada: Universidad de Granada
- Piskunov, N. (1977). *Cálculo Diferencial e Integral, tomo 1*. Moscú: edit. Mir.
- Purcell, E. J. Varberg, H. & Rigdon, S. E. (2007). *Cálculo diferencial e integral*. México: Pearson.
- Stewart, J.; Redlin, L. & Watson. S. (2007). *Precálculo. Matemáticas para el Cálculo*. México: Cengage Learning.
- Thomas, G. (2006). *Cálculo de una variable*. México: Pearson-Addison Wesley.

Bibliografía complementaria

- Ayres, F. (1971). *Cálculo diferencial e integral*. México: Mc Graw-Hill.
- Colegio Nacional de Matemáticas (2008). *Matemáticas Simplificadas*. México: Pearson.
- Colera, J., García, R. & Oliveira, J. M. (2002). *Ejercicios de Matemáticas I. Geometría Analítica plana*. Madrid: Anaya.
- Davis, B. (2019). *Ciencias y Matemáticas en acción*. Madrid: Narcea.
- Fernández, M. & Rondero, C. (2004). El inicio histórico de la ciencia del movimiento: Implicaciones epistemológicas y didácticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 7, núm. 2, julio, 2004. <https://www.redalyc.org/pdf/335/33507202.pdf>
- Fuller, G. (1997). *Geometría Analítica*. México: Editorial Continental.
- Lehmann, C. H. (1993). *Geometría Analítica*. México: Limusa/Noriega Editores.
- Leithold, L. (1982). *Cálculo con geometría analítica*. México: Harla.
- Leithold, L. (1998). *Ejercicios resueltos de cálculo con geometría analítica*, cuarta edición, México: Prentice Hall.
- Polya, G. (1994). *Métodos matemáticos de la ciencia*. Madrid: Euler.
- Schiffer, M.M. & Bowden, L. (1984). *The role of Mathematics in Science*. Washington: The mathematical Association of America.

Swokowski, E. y Jeffery, A. (2011) Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México: Cengage Learning Editores.

Zill, D. G. (1997). *Cálculo con geometría analítica*. México: edit. Iberoamericana.

Recursos de apoyo

Videos

<https://www.youtube.com/watch?v=SHstJZN-yOQ>

Sitios web

https://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/%5BPurcell,Varberg,Rigdon%5DCalculo/%5BPurcell,Varberg,Rigdon%5DCalculo.pdf

<https://librosysolucionarios.org/calculo-diferencial-e-integral/>

<http://www.conocimientosfundamentales.unam.mx/matematicas/calculo/pdfs/interior.pdf>

<https://es.search.yahoo.com/search?fr=mcafee&type=E210ES0G0&p=problemas+resueltos+de+calculo+infinitesimal>

<https://www.tebarflores.com/matematicas/201-problemas-de-calculo-infinitesimal.html>

https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/CalculoDiferencial_Integral/CALCULO_D_I_ELSIE.pdf

<http://www3.udg.edu/ice/www/uni/EEES/Alacant/Modalidad1/m1t24.pdf>

<https://acelerandolaciencia.wordpress.com/2014/01/12/newton-leibniz-y-el-calculo-infinitesimal/>

<http://adria.inaoep.mx/~diplomados/biblio/calculo/librodeUAM/ProblemasResueltos.pdf>

Unidad de aprendizaje III. Derivación

Si bien la organización curricular se presenta por temas, las actividades ofrecen situaciones que requieren de la interdisciplina para resolver el problema que ofrecen, y por lo tanto no corresponden de manera biunívoca con el listado de temas.

Propósito de la unidad de aprendizaje

Argumenta las soluciones obtenidas, como resultado de la construcción de modelos matemáticos, al incorporar el concepto de razón de cambio y de la derivada, estableciendo relaciones entre variables, en problemas relativos a fenómenos asociados con las ciencias naturales, las ciencias sociales y humanidades; fortaleciendo su formación profesional al considerar diferentes ambientes de enseñanza- aprendizaje y mostrando una actitud colaborativa.

Contenidos

- Razón promedio e instantánea de cambio
- Derivada
- Optimización
 - Criterio de la primera derivada
 - Criterio de la segunda derivada
- Análisis de funciones y características

Actividades de aprendizaje

A continuación, se presentan algunas sugerencias de actividades para desarrollar las competencias, no obstante, cada docente está en la libertad de modificar, sustituir o adaptarlas al contexto y necesidades de su grupo.

Generales

El personal docente recupera los saberes previos del tema.

El estudiantado elabora una lista de sitios web de información confiable, bajo la dirección del personal docente.

El profesorado organiza, junto con el estudiantado, la información de las fuentes necesarias para el aprendizaje de conceptos y procedimientos, para facilitar su consulta.

Hacen lecturas de textos en inglés sobre el tema.

En esta unidad, el docente guiará al estudiantado para el diseño de situaciones didácticas, preferentemente con tecnología.

Específicas

Se sugiere iniciar las sesiones con problemas de optimización como el clásico problema de la cajita.

Se quiere construir una caja sin tapa a partir de una hoja de cartón de 20x10cm. Para ello, se corta un cuadrado de lado L en cada esquina y se dobla la hoja levantando los cuatro laterales de la caja.



Determinar las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo si el lado L debe medir entre 2 y 3 cm ($2 \leq L \leq 3$).

Tomado de:

<https://www.matesfacil.com/BAC/optimizar/problemas-resueltos-optimizar-extremos-maximo-minimo-derivada-creciente-decreciente-monotonia.html>

Construir el modelo analítico y el gráfico: resolver el problema y recuperar la interpretación geométrica de la derivada.

A partir de la definición de la derivada (Regla de los cuatro pasos), demostrar la derivada de diversas funciones.

Abordar diversas aplicaciones de la Derivada, particularmente de Máximos y Mínimos.

Proyecto integrador

Se sugiere indagar y argumentar la pertinencia de un *software* educativo matemático, APP ó página web, que coadyuve al proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada en educación obligatoria.

Algunos ejemplos de Programa de cálculo simbólico (PdCS) son: Mathematica, Maple, Mathcad, Maple, Derive, Máxima, Geogebra. De páginas web: WolframAlpha. De APP: Desmos, Calculadora gráfica de Mathlab, MathStep, Mathematics, Mathway. Podrán elegir o sugerir algún otro de su interés y conocimiento.

Evidencias de la unidad	Criterios de evaluación
<p>Para la elaboración de las evidencias, es necesario reconocer la complejidad del proceso de aprendizaje, por lo que éste puede requerir una serie de productos previos que permitan retroalimentar y orientar a cada estudiante, de acuerdo a su propio ritmo de aprendizaje. El docente podrá elegir aquellos que son procesuales y permiten la retroalimentación, a diferencia de aquellos que permiten evidenciar el aprendizaje, para decidir si los considera como objeto de evaluación.</p> <p>Se sugiere la siguiente evidencia de aprendizaje:</p> <p>Infografía con diversas interpretaciones de la derivada como modelo matemático en la resolución de problemas.</p> <p>También se espera la construcción de evidencias que coadyuven a un proyecto integrador:</p> <p>Documento en donde se argumente la pertinencia de un <i>software</i> educativo matemático, APP ó página web, que coadyuve al proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada en educación obligatoria.</p>	<p>Para esta unidad se proponen dos criterios de evaluación de competencias, y más abajo los indicadores de cada uno de los aspectos que las conforman.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Utiliza diferentes interpretaciones de la derivada en problemas de optimización. - Argumenta la pertinencia de recursos digitales para la enseñanza y aprendizaje de la derivada. <p>Conocimientos</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Argumenta los conceptos y procedimientos algorítmicos de la derivada ● Explica la definición de la derivada ● Describe la composición de funciones y su derivada ● Muestra derivadas de funciones algebraicas y trascendentes <p>Habilidades</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Utiliza la interpretación de la derivada que se requiere en un problema ● Resuelve problemas con conocimientos, algoritmos y procedimientos de la derivación ● Modela y resuelve problemas de optimización con los algoritmos de la derivada ● Identifica los distintos recursos digitales para favorecer la enseñanza y aprendizaje de la derivada ● Explica el proceso metodológico para el uso de algún recurso digital en la enseñanza y aprendizaje de la derivada

	<ul style="list-style-type: none">● Describe la pertinencia de algún recurso digital en la enseñanza y aprendizaje de la derivada, a partir de sus resultados● Expresa claramente sus ideas y argumentos de forma oral y escrita en distintos contextos● Utiliza las TIC, TAC y TEP en su proceso de aprendizaje <p>Actitudes</p> <ul style="list-style-type: none">● Muestra autonomía en su proceso de aprendizaje● Escucha las conjeturas y argumentos de sus pares para resolver problemas profesionales● Muestra disposición a la autorregulación de su propio aprendizaje● Muestra perseverancia para concluir con las tareas y actividades de docencia● Colabora con distintos actores para desarrollar las actividades y para generar propuestas innovadoras● Interviene en conflictos y situaciones emergentes de manera pacífica● Favorece el respeto a la diversidad, la igualdad y el bien común <p>Valores</p> <ul style="list-style-type: none">● Respeta y escucha las opiniones y razonamientos de docentes y pares● Valora la docencia como una profesión con fundamentos teóricos y metodológicos● Muestra honestidad al citar las ideas y trabajos de pares, docentes y autores● Soluciona problemas utilizando su pensamiento crítico <p>Ponderación de acuerdo con las normas de control escolar:</p> <p>Se sugiere que la evidencia de esta unidad equivalga al 20% de la calificación total.</p>
--	--

A continuación, se presenta un conjunto de textos de los cuales el profesorado podrá elegir aquellos que sean de mayor utilidad, o bien, a los cuales tenga acceso, pudiendo sustituirlos por textos más actuales.

Bibliografía básica

- Acevedo, V. (2013). *Cálculo diferencial e Integral paso a paso*, Madrid: Palibrio.
- Apostol, T. M. (1984). *Calculus. Volumen 1. Calculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. México: Reverté.
- De Oteyza, E.; Lam, E., Fernández, C. & Carrillo, A. (2013). *Cálculo diferencial e integral*. México: Pearson.
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking. The register of semiotic representation*. New York: Springer.
- Granville, W. A. (2009). *Cálculo diferencial e integral*. México: Limusa.
- Pérez, J. (2006). *Cálculo diferencial e integral*. Granada: Universidad de Granada
- Piskunov, N. (1977). *Cálculo Diferencial e Integral, tomo I*. Moscú: edit. Mir.
- Purcell, E. J. Varberg, H. & Rigdon, S. E. (2007). *Cálculo diferencial e integral*. México: Pearson.
- Stewart, J.; Redlin, L. & Watson. S. (2007). *Precálculo. Matemáticas para el Cálculo*. México: Cengage Learning.
- Thomas, G. (2006). *Cálculo de una variable*. México: Pearson-Addison Wesley.

Bibliografía complementaria

- Ayres, F. (1971). *Cálculo diferencial e integral*. México: Mc Graw-Hill.
- Colegio Nacional de Matemáticas (2008). *Matemáticas Simplificadas*. México: Pearson.
- Colera, J., García, R. & Oliveira, J. M. (2002). *Ejercicios de Matemáticas I. Geometría Analítica plana*. Madrid: Anaya.
- Davis, B. (2019). *Ciencias y Matemáticas en acción*. Madrid: Narcea.
- Fernández, M. & Rondero, C. (2004). El inicio histórico de la ciencia del movimiento: Implicaciones epistemológicas y didácticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 7, núm. 2, julio, 2004.
<https://www.redalyc.org/pdf/335/33507202.pdf>
- Fuller, G. (1997). *Geometría Analítica*. México: Editorial Continental.
- Lehmann, C. H. (1993). *Geometría Analítica*. México: Limusa/Noriega Editores.
- Leithold, L. (1982). *Cálculo con geometría analítica*. México: Harla.
- Leithold, L. (1998). *Ejercicios resueltos de cálculo con geometría analítica*, cuarta edición, México: Prentice Hall.
- Polya, G. (1994). *Métodos matemáticos de la ciencia*. Madrid: Euler.
- Schiffer, M.M. & Bowden, L. (1984). *The role of Mathematics in Science*. Washington: The mathematical Association of America.

Swokowski, E. y Jeffery, A. (2011) Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México: Cengage Learning Editores.

Zill, D. G. (1997). *Cálculo con geometría analítica*. México: edit. Iberoamericana.

Recursos de apoyo

Videos

<https://www.youtube.com/watch?v=SHstJZN-yOQ>

Sitios web

<https://www.matesfacil.com/BAC/optimizar/problemas-resueltos-optimizar-extremos-maximo-minimo-derivada-creciente-decreciente-monotonia.html>

https://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/%5BPurcell,Varberg,Rigdon%5DCalculo/%5BPurcell,Varberg,Rigdon%5DCalculo.pdf

<https://librosolucionarios.org/calculo-diferencial-e-integral/>

<http://www.conocimientosfundamentales.unam.mx/matematicas/calculo/pdfs/interior.pdf>

<https://es.search.yahoo.com/search?fr=mcafee&type=E210ES0G0&p=problemas+resueltos+de+calculo+infinitesimal>

<https://www.tebarflores.com/matematicas/201-problemas-de-calculo-infinitesimal.html>

https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/CalculoDiferencial_Integral/CALCULO_D_I_ELSIE.pdf

<http://www3.udg.edu/ice/www/uni/EEES/Alacant/Modalidad1/m1t24.pdf>

<https://acelerandolaciencia.wordpress.com/2014/01/12/newton-leibniz-y-el-calculo-infinitesimal/>

<http://adria.inaoep.mx/~diplomados/biblio/calculo/librodeUAM/ProblemasResueltos.pdf>

Proyecto integrador del curso

Como actividad integradora del curso, se sugiere recuperar las evidencias parciales generadas en las tres unidades de aprendizaje, para la escritura de un documento que dé cuenta de la reflexión sobre la enseñanza y aprendizaje de las funciones, los límites y la derivada a partir de la teoría de representaciones semióticas (Duval, 1998).

El documento que da cuenta de la reflexión sobre la enseñanza y aprendizaje de las funciones, los límites y la derivada a partir de la teoría de representaciones semióticas, podría estar organizado en cuatro partes:

Recuperación de las ideas principales de Duval (2017), que permitan explicar la existencia de diversas representaciones en matemáticas, y la importancia de transitar entre ellas para la construcción de las matemáticas, la resolución de problemas y la comunicación matemática.

Posteriormente en los tres apartados siguientes abordar el tránsito en los temas abordados en este curso.

Finalmente concluir en el impacto en su profesionalización docente.

Evidencia de la actividad integradora	Criterios de evaluación de la actividad integradora
<p>Documento que dé cuenta de la reflexión sobre la enseñanza y aprendizaje de las funciones, los límites y la derivada a partir de la teoría de representaciones semióticas.</p>	<p>Reconoce las relaciones entre las Matemáticas, las Ciencias y la Tecnología, como formas de explicar y representar mediante modelos la realidad.</p> <p>Conocimientos</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Explica las representaciones semióticas en los temas de funciones, límites y derivada ● Define conceptos y algoritmos asociados ● Identifica las dificultades asociadas al contenido matemático, en la construcción del conocimiento matemático ● Identifica elementos de la teoría de las representaciones semióticas <p>Habilidades</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Utiliza representaciones, algoritmos, teoremas y tratamiento de la información abordada en el Cálculo diferencial ● Analiza los resultados de aprendizajes y desempeños en las matemáticas, reportados en distintos estudios ● Identifica situaciones y ambientes de aprendizaje innovadores para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Evidencia de la actividad integradora	Criterios de evaluación de la actividad integradora
	<ul style="list-style-type: none"> ● Emplea los marcos teóricos y epistemológicos estudiados con anterioridad para favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje ● Describe el impacto en su profesionalización docente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones, límites y derivada ● Expresa claramente sus ideas y argumentos de forma oral y escrita en distintos contextos ● Utiliza las TIC, TAC y TEP en su proceso de aprendizaje y en su práctica docente <p>Actitudes</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Muestra autonomía en su proceso de aprendizaje ● Integra la diversidad cultural en su práctica cotidiana ● Escucha las conjeturas y argumentos de sus pares para resolver problemas profesionales ● Muestra disposición a la autorregulación de su propio aprendizaje ● Muestra perseverancia para concluir con las tareas y actividades <p>Valores</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Reconoce la inclusión como un valor en la sociedad ● Respeta las opiniones, las estrategias de resolución de problemas y los razonamientos de docentes, pares y estudiantes ● Valora la docencia como una profesión con fundamentos teóricos y metodológicos ● Muestra honestidad al citar las ideas y trabajos de pares, docentes y autores ● Soluciona problemas utilizando su pensamiento crítico <p>Ponderación de acuerdo a las normas de control escolar: Se sugiere que la actividad integradora del curso equivalga al 50% de la calificación total.</p>

Perfil docente sugerido

Perfil académico

Matemáticas

Educación en la Especialidad en Matemáticas

Física

Ingeniería

Otras afines

Nivel Académico

Obligatorio nivel de licenciatura, preferentemente maestría o doctorado en el área de conocimiento de matemáticas, física, o ciencias exactas.

Deseable: Experiencia de investigación en el área

Experiencia docente para

Conducir grupos

Planear y evaluar por competencias

Utilizar las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje

Retroalimentar oportunamente el aprendizaje de los estudiantes.

Experiencia profesional

Referida a la experiencia laboral en la profesión sea en el sector público, privado o de la sociedad civil.

Referencias bibliográficas de este programa

- Amaya, T., Pino-Fan, L., & Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación Matemática*, 28(3), 111-144.
- Bojórquez A., Castillo, J. M., & Jiménez J. R. (2016). Development of the variational thought in secondary students. *Congreso Internacional en Tecnología y su Integración en la Educación Matemática (TIME) 2016*. 29 de junio al 2 de julio de 2016. Austrian Center for Didactics of Computer Algebra (ACDCA) y Facultad de Ciencias de la UNAM. Ciudad de México
- Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, 32(60), 255- 278. doi: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- Bringas, J. A., & Godoy, R. (2007). *Obstáculos en la transferencia de algunos conceptos del cálculo aprendidos en el contexto del movimiento a otros*. <http://132.248.139.60/Eventos/ForoMatematicas2/memorias2/ponencias/40.pdf>
- Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., & Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa*, 44.
- Burgos, M., Godino, J. D., Giacomone, B., & Beltrán-Pellicer, P. (2018). *Competencia de análisis epistémico de tareas de proporcionalidad de futuros profesores*.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista Ema*, 8(2), 121-156.
- Chapman, O., & An, S. (2017). A survey of university-based programs that support in-service and pre-service mathematics teachers' change. *ZDM-Mathematics Education*, 49(2), 171-185.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed). *Investigaciones en matemática educativa II*, 173-201. México: Grupo editorial Iberoamérica.
- García, M. S. y Dolores, C. (2016). Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. 46 (2), 49-70. Recuperado de: <http://www.revistaunion.org>
- Giacomone, B. (2017). Análisis Ontosemiótico de una tarea de modelización matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-11). Recuperado de <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>
- Giacomone, B. (2018). *Desarrollo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de educación secundaria en el marco del enfoque ontosemiótico*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

- Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., & Blanco, T. F. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación*, 29(4),1109-1.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 90-113.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Font, V., & Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. AIEM. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 63-83.
- Godoy, R. (s/f). *El papel de los problemas en el aprendizaje y la enseñanza del cálculo diferencial e integral*. <https://www.uv.mx/eical10/files/2019/09/Ramiro-Avila-Godoy.pdf>
- Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo*. *Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. Morelia. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
- Panorkou, N., Maloney, A., & Confrey, J. (2016). *Expressing Covariation and Correspondence relationships in elementary schooling*. Recuperado de https://nctm.confex.com/nctm/2014RP/webprogram/ExtendedAbstract/Paper1940/EQX_NCTM_040314%20.pdf
- Pino-Fan, L., Font, V., & Godino J. D. (2015). *Matemática Educativa: La formación de profesores: El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: Pautas y criterios para su evaluación y desarrollo*. (pp. 137-151). México, DF: Ediciones DDS y Universidad Autónoma de Guerrero.
- Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutierrez, A., & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: past, present and future* (pp. 461-494). Rotterdam: Ed. Sense Publisher.
- Ramos, L. y Jiménez, J. (2014). Elementos teóricos para analizar el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante. *El cálculo y su enseñanza*, 5, pp. 107-124.
- Rivera, A. (2014). *Cálculo Integral. Sucesiones y Series de funciones*. México: Editorial Patria.
- Rojas, G. & Segura, L. (2019). *Visión STEM para México*. México: Alianza para la promoción de STEM.
- Ruíz, R. & Grijalva, A. (2018). *Diseño de actividades didácticas en el estudio de la variación a partir de la resolución de problemas con apoyo en GeoGebra*. Autor.
- Santaló, M. & Carbonell, V. (2001). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Editorial Éxodo.
- Schoenfeld, A. & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher*, 81(6), 420–427.
- SEP (2019). *Normas específicas de control escolar relativas a la selección, inscripción, reinscripción, acreditación, regularización, certificación y titulación de las licenciaturas para la formación de docentes de educación básica en la modalidad escolarizada (planes 2018)*. México: SEP.

- Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Vasco, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. In *Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática*, Blumenau, 9, pp. 2009-2010.
- Wilhelmi, M., Godino, J. D., & Lasa, A. (2014). Significados conflictivos de ecuación y función en estudiantes de profesorado de secundaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 573- 582). Salamanca: SEIEM.